

# Diagrammes de Voronoï de trois droites en position arbitraire

## Mémoire

26 Juin 2008

dans le cadre du

Master Recherche mention Informatique spécialité Perception,  
Raisonnement, Interaction Multimodale  
de l'Université Henri Poincaré – Nancy I

par

Christian Gillot

### Membres du Jury

*Encadrants :* S. Lazard  
M. Pouget

*Membres :* N. Carbonell  
D. Galmiche  
C. Godard  
D. Méry  
G. Perrier

Mis en page avec la classe thloria.

# Remerciements

Ce mémoire de master recherche est le résultat de mon premier vrai travail de recherche. Il est l'aboutissement de cinq années d'étude à l'université Henri Poincaré - Nancy I et la réalisation d'un rêve d'enfant. Je tiens à remercier à mes encadrants et mes professeurs pour leur compréhension et leur aide, c'est grâce à eux que mon stage s'est bien passé.

Merci donc à mes deux encadrants Sylvain Lazard et Marc Pouget pour la qualité de leur encadrement, leur patience, leur bon esprit, leurs encouragements et surtout leur pédagogie. Je leur suis d'autant plus reconnaissant que j'ai beaucoup appris lors de ce stage de master recherche, aussi bien pour la méthodologie, la rigueur, la rédaction, etc. Je tiens également à remercier tous mes collègues de VEGAS pour leur accueil au sein de l'équipe.

Merci à Stéphane Gorla, Michael Cai et Farid Feiz pour toutes ces discussions enrichissantes sur le monde de la recherche que je commence à peine à découvrir. Merci encore à Stéphane qui a eu la gentillesse et la patience de bien vouloir relire ce mémoire. Merci enfin à mes proches et à mes camarades pour leur soutien.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1 Diagramme de Voronoï . . . . .	1
2 État de l'art . . . . .	1
3 Problématique . . . . .	2
4 Résultats . . . . .	3
5 Organisation . . . . .	4
<b>1 Préliminaires</b>	<b>5</b>
1.1 Diagramme de Voronoï . . . . .	5
1.2 Coniques et quadriques . . . . .	5
1.3 Géométrie projective . . . . .	6
<b>2 Détermination des cas dégénérés</b>	<b>8</b>
<b>3 Trois droites gauches toutes parallèles à un même plan</b>	<b>10</b>
3.1 Mise en équation du problème . . . . .	10
3.2 Étude du trisecteur . . . . .	11
3.2.1 Nature de la projection du trisecteur . . . . .	11
3.2.2 Nature du trisecteur . . . . .	13
3.2.3 Propriété de monotonie . . . . .	14
3.3 Cellules 2D du diagramme de Voronoï . . . . .	14
3.3.1 Cellule des droites $l_1$ et $l_2$ . . . . .	16
3.3.2 Cellule des droites $l_1$ et $l_3$ . . . . .	16
3.3.3 Cellule des droites $l_2$ et $l_3$ . . . . .	16
<b>4 Deux droites parallèles, la troisième leur étant gauche</b>	<b>17</b>
4.1 Mise en équation du problème . . . . .	17
4.2 Intersection d'un paraboloïde hyperbolique et d'un plan . . . . .	18
4.3 Étude du trisecteur . . . . .	19
4.4 Cellules 2D du diagramme de Voronoï . . . . .	21
4.4.1 Cellule des droites $l_1$ et $l_2$ . . . . .	21
4.4.2 Cellule des droites $l_2$ et $l_3$ . . . . .	22
4.4.3 Cellule des droites $l_1$ et $l_3$ . . . . .	22

<b>5</b>	<b>Trois droites parallèles à un même plan dont deux concourantes</b>	<b>24</b>
5.1	Mise en équation du problème . . . . .	24
5.2	Étude du trisecteur . . . . .	25
5.3	Cellules 2D du diagramme de Voronoï . . . . .	26
5.3.1	Cellule des droites $l_1$ et $l_2$ . . . . .	26
5.3.2	Cellule des droites $l_2$ et $l_3$ . . . . .	26
5.3.3	Cellule des droites $l_1$ et $l_3$ . . . . .	26
<b>6</b>	<b>Trois droites non parallèles à un même plan dont deux concourantes</b>	<b>28</b>
6.1	Étude du trisecteur . . . . .	28
6.2	Cellules 2D du diagramme de Voronoï . . . . .	31
6.2.1	Cellule des droites $l_1$ et $l_2$ . . . . .	31
6.2.2	Cellule des droites $l_2$ et $l_3$ . . . . .	31
6.2.3	Cellule des droites $l_1$ et $l_3$ . . . . .	31
	<b>Conclusion</b>	<b>33</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>34</b>
<b>A</b>	<b>Trois droites deux à deux coplanaires</b>	<b>36</b>
A.1	Deux paires de droites coplanaires dans deux plans distincts . . . . .	36
A.1.1	Une paire s'intersecte, l'autre est parallèle . . . . .	36
A.1.2	Chaque paire s'intersecte . . . . .	36
A.2	Trois paires de droites coplanaires formant des plans distincts . . . . .	36
A.2.1	Chaque paire de droite est parallèle . . . . .	36
A.2.2	Les droites sont sécantes en un même point . . . . .	36
A.2.3	Monotonie . . . . .	37
A.3	Toutes les droites sont dans un même plan . . . . .	37
A.3.1	Les droites sont deux à deux parallèles . . . . .	37
A.3.2	Deux droites sont parallèles, la troisième les intersecte . . . . .	37
A.3.3	Les trois droites se rencontrent en un même point . . . . .	37
A.3.4	Les trois droites se coupent en trois points . . . . .	37
A.3.5	Monotonie . . . . .	37



# Introduction

Dans ce mémoire, nous apportons une étude théorique complète et nouvelle du diagramme de Voronoï de trois droites dans l'espace euclidien. Nous définissons ce qu'est un diagramme de Voronoï puis où en est la recherche sur ce sujet. Nous expliquons ensuite quel est le problème que nous avons choisi d'étudier et enfin nous donnons les résultats obtenus.

## 1 Diagramme de Voronoï

Le diagramme de Voronoï d'un ensemble d'objets  $E$  est, sommairement, la décomposition d'un espace métrique en cellules. La cellule de  $k$  objets se compose de tous les points qui sont plus près de ces  $k$  objets que de n'importe quelle autre cellule.

Le diagramme de Voronoï tel qu'on le connaît classiquement est le diagramme de Voronoï de points dans le plan euclidien, dont on peut voir un exemple sur la figure 1. La cellule d'un point est la région du plan plus proche de ce point que de tout autre point. Une fois le diagramme calculé, la question à laquelle on veut répondre est : étant donné un point quelconque, à quelle cellule appartient-il ?

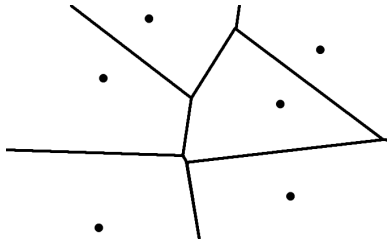


FIG. 1 – Diagramme de Voronoï de points dans le plan euclidien

Cette question peut se poser pour des espaces bien plus compliqués que le plan euclidien et pour des objets bien plus compliqués que des points, d'où la définition généralisée. Dans ce mémoire, nous nous intéressons au diagramme de Voronoï de droites dans l'espace euclidien. C'est un problème compliqué car les cellules ne sont pas linéaires mais sont des cellules d'arrangements de quadriques (c'est-à-dire des cellules d'arrangements de surfaces du second degré).

## 2 État de l'art

Les diagrammes de Voronoï ont été le sujet de beaucoup de recherche. Pour les points, les diagrammes et leur complexité sont bien compris et des algorithmes optimaux, ainsi que des implantations robustes et efficaces, existent pour les calculer pour n'importe quelle dimension (voir par exemple [Aur91], [AK99], [BDP<sup>+</sup>02], [BDP<sup>+</sup>92], [CSY97], [CS89], [For97], [ABSC00], [PT06], [Sei81]). Néanmoins, il reste des problèmes importants qui sont le sujet d'articles récents. La situation est la même pour les segments et les polygones en deux dimensions (voir par exemple [Kar04]).

En revanche, la situation est beaucoup moins claire pour les droites, les segments et les polyèdres en trois dimensions. En particulier, la détermination de la complexité combinatoire du diagramme de Voronoï de  $n$  droites ou segments dans  $\mathbb{R}^3$  est un problème de recherche ouvert. La meilleure borne inférieure connue est  $\Omega(n^2)$  et la meilleure borne supérieure connue est  $O(n^{3+\epsilon})$  (voir [Sha94]). La

conjecture ici est que la complexité d'un tel diagramme est presque quadratique. Dans le cas restreint d'un ensemble de  $n$  droites avec un nombre fixe  $c$  de directions possibles, Koltun et Sharir ont montré que la borne supérieure est  $O(n^{2+\varepsilon})$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  (voir [KS03]).

Peu d'algorithmes existent pour calculer exactement le diagramme de Voronoï d'objets linéaires. Il faut bien se rendre compte que c'est un problème bien plus complexe puisque les frontières des cellules ne sont plus linéaires. Le calcul de l'axe médian d'un polyèdre (un sous-ensemble du diagramme de Voronoï des faces d'un polyèdre) est le problème qui a été le plus étudié dans ce contexte, voir par exemple [Cul00], [Mil93].

L'axe médian a été beaucoup étudié de par son intérêt théorique mais également parce qu'il possède un intérêt pratique. En effet, l'axe médian est un outil qui a de nombreuses utilisations dans de nombreux domaines. Par exemple : le maillage en éléments finis (voir [SNTM92]), la simplification de modèle pour l'analyse en ingénierie, la reconnaissance de caractéristiques, etc. On en voit une illustration en 2D sur les figures suivantes, l'axe médian conserve la forme tout en affinant les formes, ce qui aide à la reconnaissance de formes (voir [Pal02]). En effet, l'axe médian est une représentation complète de forme. Il est également utilisé dans le domaine médical, par exemple pour l'estimation des sténoses laryngo-trachéales, l'estimation des anévrysmes de l'aorte sous-rénale (voir [SMN<sup>+</sup>06]).

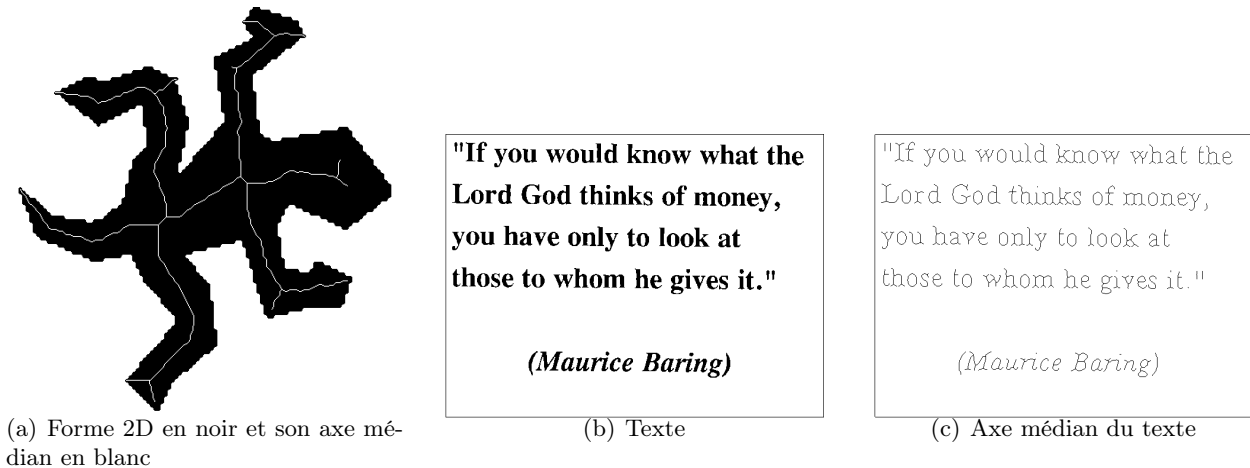


FIG. 2 – Exemples d'axe médian

De nombreux articles donnent des algorithmes calculant une approximation du diagramme de Voronoï (voir par exemple [DZ02], [ER02], [HCK99], [TT97]).

Récemment, des avancées ont été faites sur le problème lié du calcul de cellules d'arrangement de quadriques (en effet chaque cellule du diagramme de Voronoï est constituée d'une telle cellule d'arrangement), voir entre autres [BHK<sup>+</sup>05], [KKM99], [MTT05], [SW06], [SS97].

Une première étude exacte du diagramme de Voronoï de trois droites dans l'espace a été faite dans le papier [ELLS07]. L'étude porte sur trois droites gauches deux à deux et non toutes parallèles à un même plan. Dans cette configuration, on y montre que le trisecteur est composé de quatre branches infinis de :

- soit une quartique sans singularité
- soit une cubique et une droite qui ne s'intersectent pas dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ .

et l'on y donne un critère permettant de discriminer ces deux cas de figure. On y démontre un certain nombre de propriétés fondamentales du diagramme de Voronoï dont la propriété de monotonie. Enfin on y présente un algorithme permettant de séparer par un plan les différentes composantes d'une cellule 2D et un autre permettant de séparer les différentes composantes du trisecteur.

### 3 Problématique

Dans la section précédente, on a vu qu'il existe des travaux permettant de calculer une bonne approximation du diagramme de Voronoï de droites dans l'espace. On pourrait donc se dire que le



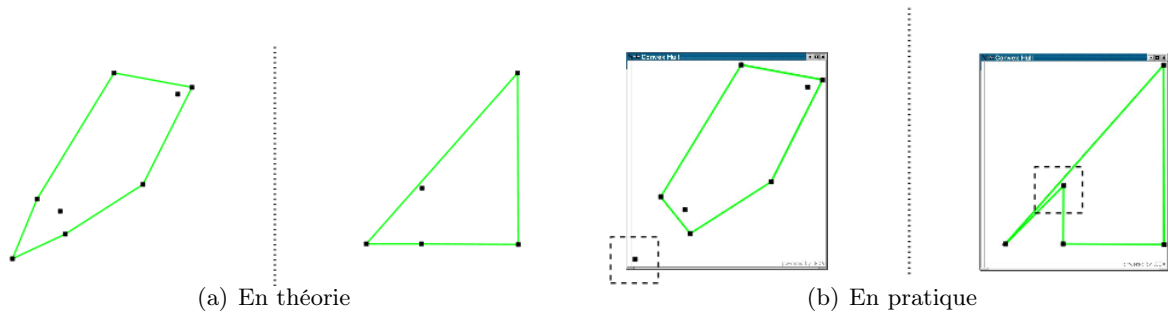


FIG. 3 – Calcul de l'enveloppe convexe de points dans le plan (tiré de [Dev06])

problème est résolu. Mais en réalité, même un algorithme calculant une bonne approximation n'est pas une réponse définitive à un problème, c'est toute la problématique de la robustesse en géométrie algorithmique.

Prenons un exemple simple tiré du cours [Laz07] sur la robustesse des calculs géométriques, le calcul de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points dans le plan. Une enveloppe convexe d'un ensemble de points  $S$  est un polygone fermé reliant un sous-ensemble  $P$  de points tel que pour toute paire de points de  $S$ , le segment les reliant est à l'intérieur du polygone. Le résultat qu'on attend est sur la figure de gauche 3(a), le résultat qu'on peut obtenir avec un algorithme non robuste est sur la figure de droite 3(b). Que s'est-il passé? À certains moments, lorsque l'algorithme prend une décision (ou évaluation d'un prédicat), il se trompe non pas à cause d'une erreur apparente de programmation, mais du fait de l'imprécision des calculs numériques. Comme l'algorithme ne renvoie pas d'erreur, il risque de boucler indéfiniment ou plus souvent de renvoyer un résultat qui n'est pas celui qu'on attendait.

La solution la plus courante à ce problème est donné par le paradigme du calcul géométrique exact. Il consiste à évaluer tous les prédicats de manière exacte. Il existe deux grandes approches l'implantant : d'une part, le calcul exact avec des nombres de longueur en bits arbitraire, mais qui est lent ; d'autre part, le calcul certifié qui utilise les nombres approchés et bascule au calcul avec nombres de longueur arbitraire que lorsque le calcul approché ne permet pas de décider de manière sûre.

Ce qui est important pour notre propos, c'est que pour pouvoir implanter un algorithme robuste, il faut comprendre quels sont les prédicats dont on a besoin. Et il faut donc bien comprendre la structure et la topologie du problème de géométrie algorithmique.

C'est pourquoi dans ce mémoire, nous réalisons une étude théorique du problème fondamental de la compréhension du diagramme de Voronoï exact de trois droites dans l'espace euclidien. Une implantation robuste et efficace d'un diagramme de Voronoï d'objets linéaires en trois dimensions requiert un traitement complet et minutieux des cas élémentaires, c'est-à-dire des diagrammes de trois ou quatre droites, points ou plans.

Nous pensons également que cette étude est nécessaire pour faire progresser l'état de l'art sur les problèmes de complexité, notamment pour démontrer les bornes de complexités au pire cas. Nous donnons également une caractérisation complète de la géométrie et de la topologie de tous les cas élémentaires d'un diagramme de Voronoï de trois droites en position arbitraire. Cela permet de progresser vers le but d'un algorithme robuste et efficace pour le diagramme de Voronoï de droites en 3D et pour le problème plus général du calcul d'axe médian d'un polyèdre.

## 4 Résultats

En complétant le travail commencé dans le papier [ELLS07], notre étude théorique donne une caractérisation complète du diagramme de Voronoï de trois droites dans l'espace. Tout d'abord, nous donnons une classification des configurations pour lesquelles la topologie du diagramme de Voronoï des trois droites est constante. Puis pour chacune de ces configurations, nous donnons une caractérisation des bissecteurs de chaque paire de droite, des cellules 2D du diagramme de Voronoï et du trisecteur des trois droites.

Par exemple, si les trois droites sont gauches deux à deux et parallèles à un même plan, nous montrerons les résultats suivants :

**Proposition.** *Le trisecteur de trois droites gauches et toutes parallèles à un même plan est composé des deux branches de quartique nodale dont la singularité est à l'infini. Sa projection dans un plan auquel les trois droites sont toutes parallèles est une hyperbole équilatère.*

**Proposition.** *Soient les droites  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  gauches deux à deux et parallèles à un même plan  $\mathcal{P}$  tel que  $l_2$  soit dans un plan parallèle à  $\mathcal{P}$  qui soit entre les plans parallèles à  $\mathcal{P}$  contenant les droites  $l_1$  et  $l_3$ . Les cellules 2D du diagramme de Voronoï de ces droites sont :*

- *La cellule des droites  $l_1$  et  $l_2$  est la région du paraboloïde hyperbolique droit formant leur bissecteur située entre les branches de la courbe du trisecteur.*
- *La cellule des droites  $l_1$  et  $l_3$  est la région du paraboloïde hyperbolique droit formant leur bissecteur située à l'extérieur des deux branches de la courbe du trisecteur.*
- *La cellule des droites  $l_2$  et  $l_3$  est la région du paraboloïde hyperbolique droit formant leur bissecteur située entre les branches de la courbe du trisecteur.*

Nous montrons également la propriété de monotonie des branches du trisecteur pour toute configuration de trois droites selon les directions définies ci-dessous :

**Définition 1.** *Soient deux droites  $l_1$  et  $l_2$  quelconques. On définit les directions  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  des droites  $l_1$  et  $l_2$  de la manière suivante :*

- *Les directions  $X$  et  $Y$  sont définies par les directions des droites bissectrices de la projection des droites  $l_1$  et  $l_2$  dans un plan parallèle à celles-ci <sup>1</sup>.*
- *La direction  $Z$  est la normale des directions  $X$  et  $Y$ .*

Une courbe est monotone par rapport à une direction si elle coupe chaque plan orthogonal à cette direction en un point.

**Propriété 1** (Propriété de monotonie). *Soient trois droites quelconque, toutes les branches du trisecteur sont monotones par rapport à une des directions  $X$ ,  $Y$  ou  $Z$ .*

**Remarque 1.** *Les branches du trisecteurs sont monotones par rapport à la direction  $X$  ou la direction  $Y$  lorsque les trois droites ne sont pas dans un même plan.*

Cette propriété pourrait s'avérer cruciale pour progresser sur la thématique du diagramme de Voronoï de  $n$  droites dans l'espace. En effet, considérons quatre droites  $l_1, \dots, l_4$ , il est important de pouvoir ordonner par exemple sur un arc du trisecteur de  $l_1, l_2$  et  $l_3$  les points d'intersection entre ce trisecteur et le trisecteur des droites  $l_1, l_2$  et  $l_4$ . Et si on sait localiser un point sur un arc et que l'arc est monotone en une direction, on peut ordonner différents points appartenant à cet axe par rapport à la direction monotone de l'arc en question.

## 5 Organisation

Dans le chapitre 1, nous présentons les notions mathématiques nécessaires pour la suite du propos. Puis dans le chapitre 2, nous déterminons les différentes situations possibles par rapport à la nature des relations reliant les trois droites. Dans chacun des chapitres suivants, nous analysons une des différentes situations d'abord en mettant en équation le problème ce qui nous donne le cadre nécessaire pour pouvoir ensuite étudier la nature et les caractéristiques géométriques et topologiques du trisecteur ainsi que des cellules 2D. Enfin, nous concluons sur les perspectives de poursuite de ce travail.

---

<sup>1</sup>Si  $l_1$  et  $l_2$  sont parallèles, cette définition reste vraie : la deuxième droite bissectrice est à l'infini.

# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Diagramme de Voronoï

Les objets dont on calcule le diagramme de Voronoï sont appelés des « **sites** ». On appelle « **cellule de Voronoï** » d'un site l'ensemble des points qui sont plus près de ce site que de tout autre et plus généralement « **cellule de Voronoï** » de  $k$  sites l'ensemble des points qui sont plus proches de ces sites que de tout autre. Le « **diagramme de Voronoï** » est l'ensemble des cellules de Voronoï.

Formellement, soient  $E$  un espace métrique doté de la distance  $d$  et  $S$  un ensemble discret d'objets. Le diagramme de Voronoï est la partition  $V$  de l'espace définie telle que pour le sous-ensemble  $s$  de  $S$ ,  $V(s)$  est l'ensemble des points à même distance des objets  $s$  et est strictement plus proches des sites de  $s$  que des autres sites de  $S$ . Mathématiquement, on écrit :

$$V(s) = \{p \in E, a \in s : d(p, a) < \min_{b \in S \setminus s} d(p, b) \text{ et } \forall c \in s : d(p, a) = d(p, c)\} \quad (1.1)$$

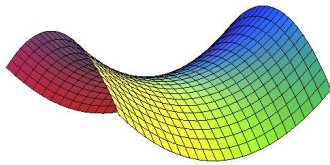
Dans l'espace  $\mathbb{R}^d$ , la cellule de  $k$  objets est génériquement de dimension  $d + 1 - k$ . Pour des objets en position générique, le diagramme est complètement décrit par les cellules de 1 à  $d + 1$  objets. Mais pour des objets en position arbitraire, le diagramme de Voronoï peut être dégénéré et contient éventuellement des cellules non vides de jusqu'à  $k$  objets (il suffit pour cela qu'un point soit à égale distance de tout objet).

Dans ce mémoire, nous cherchons à déterminer le diagramme de Voronoï de trois droites dans l'espace. Les sites, c'est-à-dire les droites, seront notées de la forme  $l_a$ , avec  $a$  le numéro de site. La cellule de Voronoï des sites  $a_1, \dots, a_k$  sera notée  $\mathcal{V}_{a_1, \dots, a_k}$ . Pour déterminer le diagramme de trois sites, on doit fondamentalement étudier les bissecteurs de deux sites (c'est-à-dire l'ensemble des points à égale distance des deux sites), la **cellule 2D** de deux droites (car elle est de dimension 2) et le trisecteur des trois sites (c'est-à-dire l'ensemble des points à égale distance des trois sites). Le bissecteur des sites  $a$  et  $b$  sera noté  $\mathcal{H}_{a,b}$  et le trisecteur des sites  $a, b$  et  $c$  sera noté  $\mathcal{H}_{a,b,c}$ .

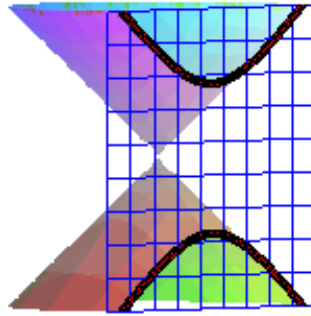
### 1.2 Coniques et quadriques

Pour caractériser le diagramme de Voronoï de trois droites, on s'intéresse au **bissecteur** de deux droites, c'est-à-dire à l'ensemble des points à égale distance de deux objets ainsi qu'au **trisecteur** de trois droites, c'est-à-dire à l'ensemble des points à égale distance de trois objets. Leur nature dépend de la relation entre les droites. Deux droites peuvent être parallèles, sécantes ou **gauches**; deux droites sont gauches si elles ne s'intersectent pas et ne sont pas parallèles, autrement dit elles ne sont pas dans un même plan.

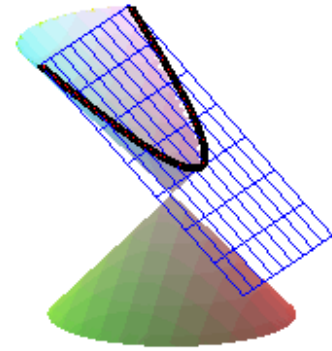
Le bissecteur de deux droites est une surface algébrique de degré 2; le trisecteur de trois droites est une courbe algébrique de degré 4. Pour les surfaces, on rencontrera des plans et des paraboloïdes hyperboliques. Quant aux courbes, on trouvera d'une part des quartiques nodales et d'autre part des coniques. Pour de plus amples détails sur les courbes et les surfaces, on pourra consulter [Fer08].



(a) Parabolöide hyperbolique.



(b) Hyperbole.



(c) Parabole.

Un **parabolöide hyperbolique** est une surface classiquement définie comme la surface réglée engendrée par les droites rencontrant deux droites non coplanaires en restant parallèle à un plan fixe (sécant à ces deux droites), appelé plan directeur du parabolöide. On l'appelle familièrement « selle de cheval ». Son équation cartésienne est de la forme  $\frac{z}{h} = \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}$ . Le parabolöide hyperbolique est dit **droit** dans le cas équilatère ( $a = b$ ). La figure 1.1(a) est un exemple d'une telle surface.

Une **quartique nodale** est une courbe algébrique de degré 4 ayant un point nodal, c'est-à-dire une singularité « admettant deux tangentes distinctes ». Plus généralement, on dit qu'une courbe admet une **singularité** en un point ou a un **point singulier** si on ne peut définir la tangente en ce point.

Si une paire de droite est coplanaire, le trisecteur est une ou deux coniques. Une **conique** est une courbe algébrique de degré 2, c'est-à-dire d'équation cartésienne de la forme  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ . Géométriquement, on peut se représenter les coniques comme les sections d'un cône de révolution par un plan (voir les figures 1.1(b) et 1.1(c)).

Nous aborderons plus particulièrement à deux types de coniques : les hyperboles et les paraboles. Une **hyperbole** est une conique ayant deux composantes connexes. Géométriquement, on obtient une hyperbole par intersection du cône de révolution et d'un plan lorsque cette intersection a deux composantes connexes (par exemple figure 1.1(b)). Une hyperbole est dite **équilatère** si ses asymptotes sont perpendiculaires (dans son équation cartésienne  $c = -a$ ). Une **parabole** est une conique que l'on peut définir géométriquement comme l'intersection du cône de révolution et d'un plan parallèle à une génératrice. On en voit une représentation sur la figure 1.1(c). Le terme parabolöide hyperbolique droit sera abrégé par **PHD**.

Enfin, on parlera d'un concept important en géométrie des surfaces : l'homéomorphisme. Un **homéomorphisme** est un isomorphisme entre deux espaces topologiques, c'est-à-dire une bijection bi-continue de l'un dans l'autre. Un homéomorphisme conserve de nombreuses propriétés entre les deux espaces topologiques et l'on s'en sert donc pour trouver une propriété sur l'espace le plus compliqué à l'aide de l'espace plus simple.

### 1.3 Géométrie projective

Comme chaque cellule du diagramme de Voronoï est une cellule d'arrangement de quadriques, nous allons mettre à profit la classification de [DLLP08] qui permet de déterminer le type de l'intersection de deux quadriques. Cette classification travaille dans l'espace projectif (noté  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ) de la géométrie projective.

La géométrie projective a ses origines dans le dessin en perspective. En effet, lorsqu'on regarde un paysage, toutes les droites parallèles se rencontrent à l'horizon. Formellement, en géométrie projective on dit que toutes les droites parallèles se coupent en un même point sur le plan à l'infini.

L'espace projectif est une extension de l'espace euclidien. Dans l'espace projectif, un point  $M$  est défini par quatre coordonnées :  $M = (x, y, z, w)$ , modulo la multiplication par un scalaire non nul. Par exemple, le point donné par  $(1, 0, 1, 1)$  est le même que celui donné par  $(2, 0, 2, 2)$ . Les trois premières coordonnées correspondent aux coordonnées  $x, y, z$  de l'espace euclidien lorsqu'elles sont divisées par  $w$  non nul. Si  $w = 0$ , le point appartient à un plan à l'infini. Dans cet espace, deux droites parallèles

se coupent en un point qui appartient à un plan à l'infini. L'intérêt de la géométrie projective est qu'on n'a plus besoin de distinguer les cas où les droites sont parallèles ou pas et c'est ce qui rend les raisonnements plus simples.

Dans ce mémoire, nous utiliserons la géométrie projective, soit pour utiliser la classification citée ci-dessus, soit pour considérer l'intersection d'une courbe avec le plan à l'infini ce que nous ferons lorsque cela simplifie le raisonnement géométrique. Pour une introduction plus approfondie sur la géométrie projective, on peut se référer par exemple à [PW01].

Pour utiliser la classification de l'intersection de deux quadriques, on doit d'abord écrire l'équation de la quadrique sous une forme homogénéisée, c'est-à-dire pour laquelle chaque monôme est de degré 2. On obtient cette équation en multipliant chaque monôme par  $w$  jusqu'à atteindre le degré 2. Cette équation homogénéisée peut s'écrire sous forme matricielle avec les variables dans l'ordre  $x, y, z$  et  $w$  comme toute forme quadratique de l'espace  $\mathbb{R}^4$ . Par exemple, le quadrique d'équation  $ax^2 + bxy + cy + dz^2 + ezx + f = 0$  a pour équation homogénéisée  $ax^2 + bxy + cyw + dz^2 + ezx + fw^2 = 0$  et s'écrit matriciellement  ${}^tXQX$  (voir l'équation 1.2).

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & 0 & \frac{c}{2} \\ \frac{b}{2} & 0 & 0 & \frac{c}{2} \\ 0 & 0 & d & 0 \\ \frac{c}{2} & \frac{c}{2} & 0 & f \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Pour déterminer le type de l'intersection de deux quadriques, on considère le **faisceau**  $P$  de leurs matrices homogénéisées  $Q$  et  $R$ , c'est-à-dire  $P(\lambda) = Q + \lambda R$ ,  $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$ . La notation  $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$  indique que  $\lambda$  peut éventuellement être infini auquel cas on ne considère plus du tout  $Q$ . C'est une manière élégante et intuitive d'écrire la combinaison linéaire  $\mu Q + \nu R$ ,  $(\mu, \nu) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  avec une seule variable. Le faisceau est donc l'ensemble des combinaisons linéaires de  $R$  et  $Q$ .

## Chapitre 2

# Détermination des cas dégénérés

Le papier *The Voronoi diagram of three lines in  $\mathbb{R}^3$*  [ELLS07] a permis d'avancer sur le problème du diagramme de Voronoï de trois droites en étudiant le cas générique, c'est-à-dire lorsque les droites sont gauches deux à deux et non toutes parallèles à un même plan.

Or deux droites de l'espace peuvent être sécantes, parallèles ou gauches et la topologie dépend de cette relation entre les droites. Rappelons que deux droites sont gauches si elles ne s'intersectent pas et ne sont pas parallèles, autrement dit elles ne sont pas dans un même plan. Par contraposée, on obtient donc les cas dégénérés suivants qui n'ont pas encore été étudié à l'heure actuelle :

1. toutes les droites sont gauches deux à deux et les trois droites sont parallèles à un même plan (exemple 2.1(a)).
2. seule une paire de droites est coplanaire. On doit considérer les deux sous-cas suivants :
  - (a) les deux droites coplanaires sont sécantes (exemple 2.1(b)).
  - (b) les deux droites coplanaires sont parallèles (exemple 2.1(c)).
3. deux paires de droites sont coplanaires, autrement dit une droite est coplanaire aux deux autres sans que celles-ci ne soient coplanaires. Chacune des paires forme un plan ; les deux plans sont distincts. Il y a deux sous-cas à considérer :
  - (a) dans un des plans, les droites se coupent tandis que dans l'autre les droites sont parallèles (exemple figure 2.1(d)).
  - (b) dans les deux plans les droites s'intersectent (exemple figure 2.1(e)).
4. les trois paires de droites sont coplanaires, chaque paire de droite forme un plan. Dans cette situation, il y a deux possibilités :
  - (a) soit les trois plans sont distincts, on a ensuite les deux sous-cas suivants :
    - i. toutes les droites sont parallèles deux à deux (exemple figure 2.1(f)).
    - ii. les trois droites se rencontrent en un même point (exemple figure 2.1(g)).
  - (b) soit les trois plans sont confondus en un même plan. On a alors quatre configurations possibles :
    - i. les droites sont parallèles deux à deux (exemple figure 2.1(h)).
    - ii. deux droites sont parallèles et la troisième les intersecte (exemple figure 2.1(i)).
    - iii. toutes les droites s'intersectent en un même point (exemple figure 2.1(j)).
    - iv. deux droites se coupent en un point alors que la troisième coupe chacune des autres en un point différent (exemple figure 2.1(k)).

Au cours des chapitres suivants, nous étudierons cas par cas ces différentes situations pour parvenir à une étude complète de tous les cas possibles du diagramme de Voronoï de trois droites.

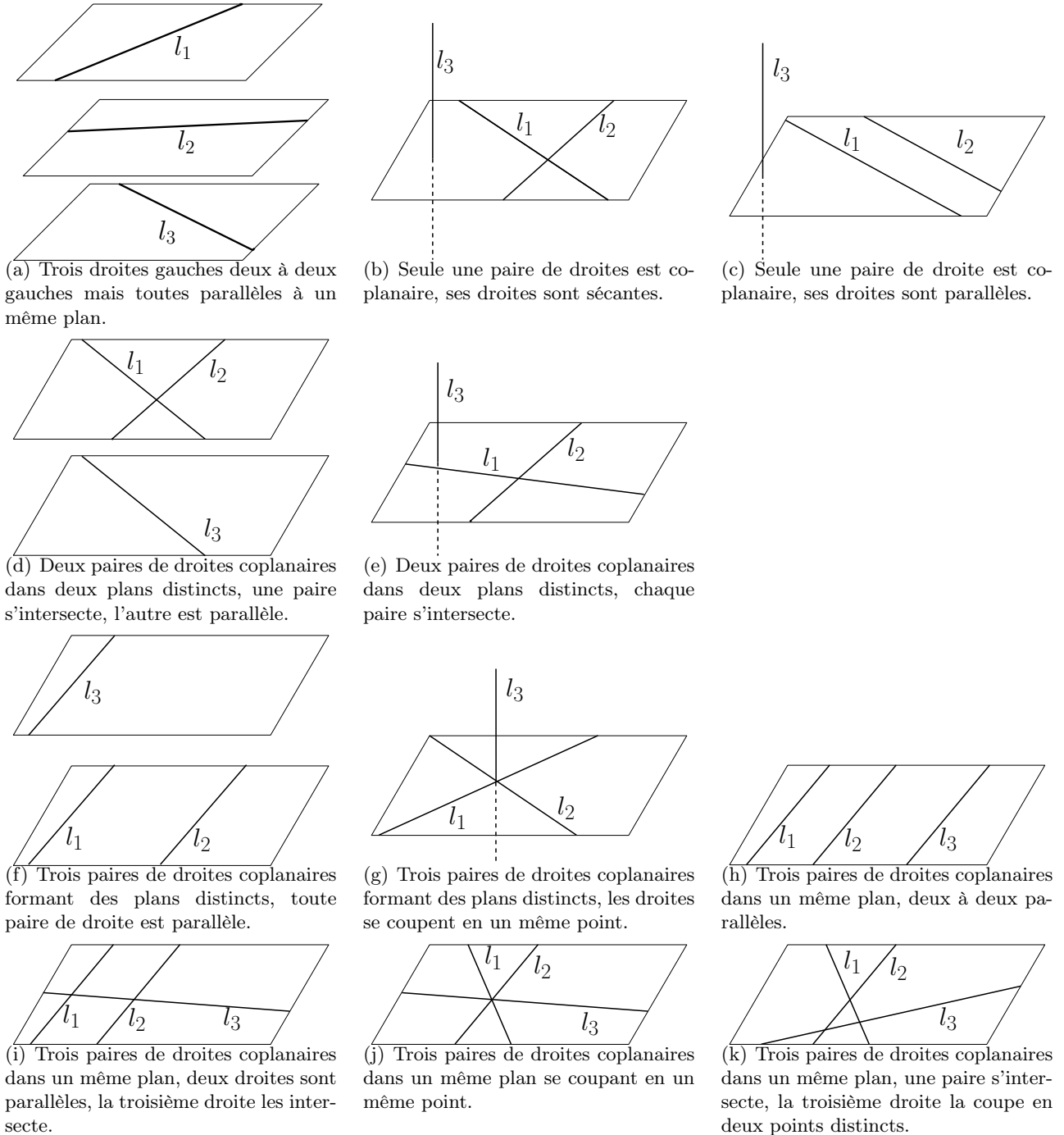


FIG. 2.1 – Classification des cas dégénérés du diagramme de Voronoï de trois droites

## Chapitre 3

# Trois droites gauches toutes parallèles à un même plan

Dans cette configuration, toute paire de droites est gauche et donc tous les bissecteurs sont des paraboloïdes hyperboliques droits. Néanmoins, toutes les droites étant parallèles à un même plan, l'étude du diagramme de Voronoï est plus simple que pour des droites en position générique.

Le trisecteur est l'intersection de deux paraboloïdes hyperboliques droits dont on montrera que c'est une quartique nodale se projetant en une hyperbole équilatère dans un plan auquel les trois droites sont parallèles. La courbe du trisecteur découpe chacun des bissecteur en deux : d'une part la région du bissecteur entre les branches du trisecteur et d'autre part les deux régions situées à l'extérieur des branches du trisecteur. L'une de ses parties formant la cellule 2D des deux droites du bissecteur. On discrimine ces situations à l'aide de la projection ce qui permettra de décrire précisément chacune de ces cellules.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons démontrer les deux résultats suivants qui caractérisent le diagramme de Voronoï de cette configuration ainsi que la propriété de monotonie :

**Proposition 1.** *Le trisecteur de trois droites gauches et toutes parallèles à un même plan est composé des deux branches de quartique nodale dont la singularité est à l'infini. Sa projection dans un plan auquel les trois droites sont toutes parallèles est une hyperbole équilatère.*

**Proposition 2.** *Soient les droites  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  gauches deux à deux et parallèles à un même plan tel que  $l_2$  soit dans un plan parallèle à  $\mathcal{P}$  qui soit entre les plans parallèles à  $\mathcal{P}$  contenant les droites  $l_1$  et  $l_3$ . Les cellules 2D du diagramme de Voronoï de ces droites sont :*

- *La cellule des droites  $l_1$  et  $l_2$  est la région du paraboloïde hyperbolique droit formant leur bissecteur située entre les branches de la courbe du trisecteur.*
- *La cellule des droites  $l_1$  et  $l_3$  est la région du paraboloïde hyperbolique droit formant leur bissecteur située à l'extérieur des deux branches de la courbe du trisecteur.*
- *La cellule des droites  $l_2$  et  $l_3$  est la région du paraboloïde hyperbolique droit formant leur bissecteur située entre les branches de la courbe du trisecteur.*

Dans ce chapitre, nous commencerons par mettre en équation ce problème pour ensuite étudier le trisecteur et enfin les cellules 2D du diagrammes de Voronoï de cette configuration de trois droites.

### 3.1 Mise en équation du problème

Soient trois droites  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  toutes parallèles à un même plan mais deux à deux gauches (voir la figure 2.1(a)). Pour tout tel triplet de droites, on peut toujours trouver un système de coordonnées cartésiennes orthonormé  $(x, y, z)$  au besoin à l'aide d'une isométrie affine et d'une homothétie illustré par la figure 3.1 tel que :

- toutes les droites soient parallèles au plan  $xy$ .
- la droite  $l_1$  soit définie par le point  $p_1 = (0, 0, -1)$  et le vecteur  $v_1 = (1, -\theta, 0)$ .
- la droite  $l_2$  soit définie par le point  $p_2 = (0, 0, 1)$  et le vecteur  $v_2 = (1, \theta, 0)$ .



- la droite  $l_3$  soit définie par le point  $p_3 = (0, b, c)$  et le vecteur  $v_3 = (1, \rho, 0)$ .
- $\theta, \rho, b, c \in \mathbb{R}, \theta \neq 0, c > 1$

En effet, pour deux droites gauches il existe un plan auquel ces droites sont parallèles et qui est à la même distance des deux droites. On prend donc ce plan pour le plan  $xy$  et l'origine comme l'intersection des projetés des deux droites dans le plan  $xy$ . Par hypothèse la troisième droite est parallèle à ce plan. Enfin, les droites étant dans des plans parallèles à  $xy$ , elles sont à une altitude  $z$  constante. On choisit les deux droites les plus basses pour  $l_1$  et  $l_2$ . La droite  $l_3$  est donc au-dessus ce qui a pour conséquence que  $c > 1$ .

Si  $\theta$  était nul alors  $l_1$  et  $l_2$  seraient parallèles, ce qui est contraire aux hypothèses de départ et donc impossible. On peut définir  $l_3$  par le vecteur directeur  $v_3 = (1, \rho, 0)$  et le point  $(0, b, c)$  en supposant que la première coordonnée de  $v_3$  est non nulle et l'on traite les cas où elle est nulle par symétrie des coordonnées  $x$  et  $y$ .

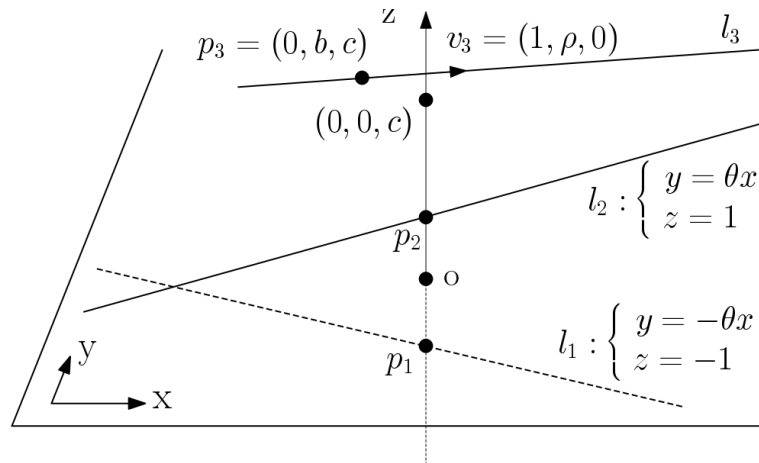


FIG. 3.1 – Cas simplifié de trois droites gauches deux à deux mais toutes parallèles à un même plan

On peut utiliser ce repère pour étudier le problème car une isométrie affine et une homothétie ne modifie pas le rapport de distance et donc la géométrie du problème. Une isométrie affine est une transformation bijective d'un espace affine euclidien dans un autre qui conserve les distances, elle change donc le point de vue qu'on a sur le problème mais absolument pas sa géométrie. Les translations et les rotations sont des exemples d'isométries. L'homothétie est une transformation qui modifie les distances par dilatation mais conserve les angles; elle ne modifie pas la nature géométrique des objets : par exemple, une hyperbole reste une hyperbole après transformation par une homothétie.

Considérons deux de ces trois droites, on a le lemme classique suivant démontré par exemple dans [ELLS07] :

**Lemme 1.** *Le bissecteur de deux droites gauches est un parabolôïde hyperbolique droit.*

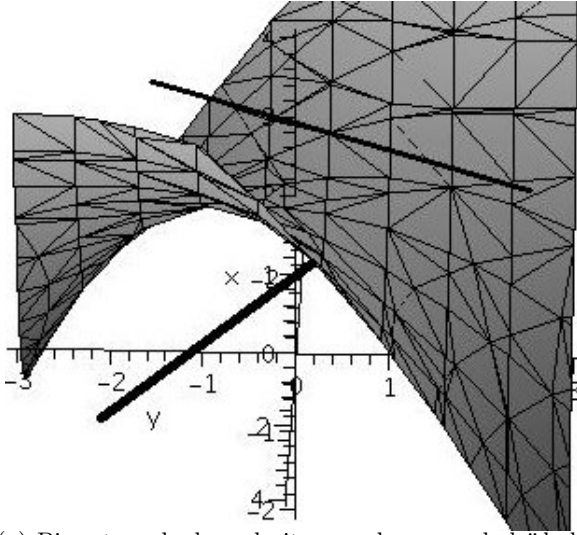
On peut voir une illustration de ce lemme sur la figure 3.2(a).

## 3.2 Étude du trisecteur

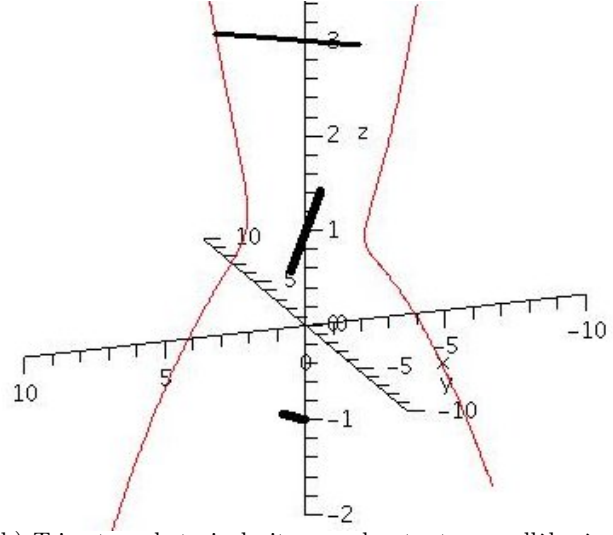
Soient  $\mathcal{H}_{1,2}$ ,  $\mathcal{H}_{1,3}$  et  $\mathcal{H}_{2,3}$  les parabolôïdes hyperboliques droits formant respectivement les bissecteurs des droites  $l_1$  et  $l_2$ ,  $l_1$  et  $l_3$  et  $l_2$  et  $l_3$ . Par abus de notation, on notera également par  $\mathcal{H}_{a,b}$  une équation implicite du bissecteur des droites  $l_a$  et  $l_b$ . Nous allons montrer la proposition 1 qui caractérise le trisecteur de cette configuration par les trois lemmes suivants ainsi que la propriété de monotonie.

### 3.2.1 Nature de la projection du trisecteur

**Lemme 2.** *La projection du trisecteur dans un plan auquel les trois droites sont toutes parallèles est une hyperbole équilatère.*



(a) Bissecteur de deux droites gauches : parabolôïde hyperbolique droit



(b) Trisecteur de trois droites gauches toutes parallèles à un même plan : quartique nodale

*Démonstration.* Dans la paramétrisation utilisée les trois droites sont parallèles au plan  $z = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Nous allons étudier le problème pour  $z = 0$  sachant que la translation en  $z$  ne change rien aux résultats. Tout d'abord, on peut écrire les équations de  $\mathcal{H}_{1,2}$  et  $\mathcal{H}_{1,3}$  de manière à exprimer  $z$  en fonction de  $x$  et  $y$  :

$$\mathcal{H}_{1,2} : z = \frac{-\theta}{1 + \theta^2} xy \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{1,3} : z = & \frac{1}{2(1 + \rho^2)(1 + \theta^2)(c + 1)} ((\rho^2 - \theta^2)x^2 - (\rho^2 - \theta^2)y^2 \\ & + 2\rho b(1 + \theta^2)x - 2b(1 + \theta^2)y - 2(\theta + \rho)(\theta\rho + 1)xy \\ & + (1 + \theta^2)((c^2 - 1)(1 + \rho^2) + b^2)) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dans ces deux équations, le dénominateur est strictement positif. Considérons maintenant  $\mathcal{C}_{1,2,3}$  une équation implicite de la projection dans le plan  $z = 0$  du trisecteur, c'est-à-dire le numérateur de la différence des équations 3.2 et 3.1.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{1,2,3} : & (\theta^2 - \rho^2)x^2 - (\theta^2 - \rho^2)y^2 - 2\rho b(1 + \theta^2)x \\ & + 2b(1 + \theta^2)y + 2((1 + \theta^2)\rho - \theta c(1 + \rho^2))xy \\ & - (1 + \theta^2)((c^2 - 1)(1 + \rho^2) + b^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

L'équation de  $\mathcal{C}_{1,2,3}$  étant de la forme  $Ax^2 - Ay^2 + Cxy + \dots = 0$  avec  $A \neq 0$  car  $a \neq \rho$  par hypothèse, la projection dans le plan  $z = 0$  de la courbe du trisecteur est une hyperbole équilatère ou deux droites sécantes.

Selon la classification des coniques affines établie dans [Del00, section 9.4], on considère les matrices  $Q$  et  $R$  associées à l'équation de  $\mathcal{C}_{1,2,3}$  :

$$Q = \begin{bmatrix} \theta^2 - \rho^2 & \theta^2\rho - \theta\rho^2c - \theta c + \rho \\ \theta^2\rho - \theta\rho^2c - \theta c + \rho & -(\theta^2 - \rho^2) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$R = \begin{bmatrix} \theta^2 - \rho^2 & \theta^2\rho - \theta\rho^2c - \theta c + \rho & -(1 + \theta^2)b\rho \\ \theta^2\rho - \theta\rho^2c - \theta c + \rho & -(\theta^2 - \rho^2) & (1 + \theta^2)b \\ -(1 + \theta^2)b\rho & (1 + \theta^2)b & -(1 + \theta^2)((1 + \rho^2)(c^2 - 1) + b^2) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Pour pouvoir conclure, il faut déterminer le signe du déterminant de  $Q$ , la signature de  $Q$  et le signe du déterminant de  $R$ . Le déterminant de  $Q$  vaut  $-(1 + \rho^2)((\theta c - \rho)^2 + \theta^2(\theta - c\rho)^2)$ . Puisque par hypothèse  $\theta$  n'est pas nul, pour que la somme de carrés du deuxième facteur soit nulle il faut que les deux carrés le composant soient nuls. Cela revient à  $\theta = \frac{\rho}{c}$  et  $\theta = c\rho$ , qui ne peut être vrai que si  $c = 1$ . Or par hypothèse,  $c > 1$  donc la somme de carrés est strictement positive. L'autre facteur  $-(1 + \rho^2)$  est strictement négatif donc le déterminant de  $Q$  est strictement négatif.

En calculant les valeurs propres de  $Q$  avec Maple, on voit qu'elles sont de signes opposés. Comme le déterminant est strictement négatif, la matrice  $Q$  est de rang maximal, c'est-à-dire que les valeurs propres sont différentes. Donc la signature de  $Q$  est  $(1, 1)$ .

Quant au déterminant de  $R$  il vaut :

$$\det(R) = (c^2 - 1)(1 + \rho^2)^2(1 + \theta^2)((\theta c - \rho)^2 + \theta^2(\theta - \rho c)^2 + \theta^2 b^2) \quad (3.6)$$

Hormis le facteur  $(c^2 - 1)$  tous les facteurs du déterminant de  $R$  sont strictement positifs. En effet, les facteurs  $(1 + \rho^2)^2$  et  $(1 + \theta^2)$  sont strictement positifs et le dernier facteur est une somme de carrés qui est la même que pour le déterminant de  $Q$  (qu'on a montré strictement positif) à laquelle s'ajoute le carré  $\theta^2 b^2$ . Donc le signe du déterminant de  $Q$  est le signe de l'expression  $c^2 - 1$ . Cette expression est nulle si et seulement si  $c = 1$  ou  $c = -1$ , or par hypothèse  $c > 1$  donc le déterminant de  $R$  est non nul.

Puisque la signature de  $Q$  est  $(1, 1)$ , que son rang est de 2 et que le déterminant de  $R$  est non nul, d'après la classification [Del00, section 9.4] la courbe  $\mathcal{C}_{1,2,3}$  est une hyperbole. Et comme son équation est de la forme  $Ax^2 - Ay^2 + Cxy + \dots = 0$ , c'est une hyperbole équilatère.  $\square$

### 3.2.2 Nature du trisecteur

**Lemme 3.** *Le trisecteur de trois droites gauches et toutes parallèles à un même plan est une quartique nodale.*

*Démonstration.* Le trisecteur est l'intersection de deux bissecteurs. On peut en voir une représentation sur la figure 3.2(b). Pour étudier le type de la courbe du trisecteur, on étudie le polynôme caractéristique du faisceau de  $\mathcal{H}_{1,2}$  et  $\mathcal{H}_{1,3}$  pour appliquer la classification proposée dans [DLLP08].

Le faisceau de  $\mathcal{H}_{1,2}$  et  $\mathcal{H}_{1,3}$  est l'ensemble de leurs combinaisons linéaires, c'est-à-dire :  $P(\lambda) = Q + \lambda R, \forall \lambda \in \mathbb{R}$  avec  $Q$  (respectivement  $R$ ) la notation matricielle de l'équation homogénéisée (voir 1.3) de  $\mathcal{H}_{1,2}$  (respectivement  $\mathcal{H}_{1,3}$ ). Le polynôme caractéristique est obtenu en calculant le déterminant de ce faisceau, autrement dit :  $\mathcal{D} = \det(P(\lambda))$ . À l'aide de Maple ([Map07]), on calcule ce polynôme et on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & 16(1 + \theta^2)^3 \\ & \cdot ((1 + \rho^2)(\theta + \rho)^2 \lambda^2 - 4\theta(\theta + \rho)(\theta\rho + 1)\lambda + 4\theta^2(1 + \theta^2)) \\ & \cdot (-(1 + \rho^2)(1 + c)\lambda + 2\theta(\theta^2 + 1))^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Outre le facteur  $16(1 + \theta^2)^3$  strictement positif, on a deux polynômes en  $\lambda$ . Le polynôme linéaire en  $\lambda$  au carré donne une solution réelle de multiplicité 2. Étudions maintenant le discriminant du polynôme de degré 2 en  $\lambda$ , qui vaut  $-16(\rho - \theta)^2(\rho + \theta)^2\theta^2$ . Remarquons que  $\theta = \pm\rho$  est impossible puisque cela entraînerait que  $v_1$  et  $v_3$  ou  $v_2$  et  $v_3$  soient colinéaires ce qui contredirait les hypothèses de départ. Le discriminant est donc un produit de carrés non nuls multiplié par  $-16$ , il est donc strictement négatif. Le facteur de degré 2 en  $\lambda$  a donc deux racines complexes.

Au total,  $\mathcal{D}$  a une racine réelle double et deux racines complexes, d'après [DLLP08], le trisecteur dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  est soit une quartique nodale, soit une conique ou deux coniques sécantes. Pour déterminer plus précisément le type nous allons utiliser un argument géométrique.

Supposons que le trisecteur soit une ou deux coniques, on sait que la projection dans un plan d'une conique est une conique ou un objet plus simple, à savoir une droite ou deux. Puisque la projection dans le plan  $z = 0$  est une hyperbole équilatère, si le trisecteur contenait une conique elle serait une hyperbole et il y aurait donc deux points d'intersection à l'infini.

Or examinons l'intersection avec le plan l'infini de  $\mathcal{H}_{1,2}$  et  $\mathcal{H}_{1,3}$  en homogénéisant avec la variable  $w$  et examinant la situation pour  $w$  nul, on aboutit alors au système suivant :

$$\begin{cases} w = 0 \\ -\theta xy = 0 \\ (\theta^2 - \rho^2)x^2 - (\theta^2 - \rho^2)y^2 + 2(\rho^2 + \rho^2\theta + \theta^2\rho + \theta)xy = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Clairement la solution de ce système est  $(0, 0, 1, 0)$  puisque  $x$  et  $y$  doivent être nuls pour être solutions. On a donc un seul point d'intersection à l'infini ce qui contredit l'hypothèse que le trisecteur contienne une conique. Donc le trisecteur est une quartique nodale.  $\square$

**Lemme 4.** *La quartique nodale trisecteur de trois droites gauches et toutes parallèles à un même plan a une singularité à l'infini et est composée de deux branches.*

*Démonstration.* On sait qu'une quartique nodale a une singularité. De plus, le trisecteur peut être vu comme la différence de deux paraboloides hyperboliques (ce qui est un cylindre hyperbolique) intersecté avec le dernier paraboloides hyperbolique. Un point du trisecteur vu comme l'intersection de ceux surfaces est régulier si les deux plans tangents aux deux surfaces en ce point sont distincts. Or sur le cylindre hyperbolique on a une tangente verticale tandis que sur le dernier paraboloides hyperbolique on a une tangente qui n'est pas verticale. Donc tous les points de  $\mathbb{R}^3$  sont réguliers et par suite la singularité est à l'infini.

La projection entre le plan  $xy$  et un PHD est un homéomorphisme car le PHD étant d'axe  $(Oz)$  toute droite verticale coupe le PHD en un seul point. De plus, la projection dans le plan  $xy$  du trisecteur est une hyperbole qui a deux branches. Donc le trisecteur est composé de deux branches.  $\square$

### 3.2.3 Propriété de monotonie

Nous allons maintenant démontrer la propriété de monotonie pour trois droites gauches toutes parallèles à un même plan. Les droites  $l_1$  et  $l_2$  sont celles utilisées pour la preuve sachant qu'elle reste vrai peu importe la paire choisie puisque les droites sont toutes parallèles à un même plan.

**Lemme 5.** *Soient trois droites gauches toutes parallèles à un même plan, toutes les branches du trisecteur sont monotones par rapport à la direction  $x$  (ou par rapport à la direction  $y$ ).*

*Démonstration.* D'après la proposition 1, la projection du trisecteur est une hyperbole équilatère dans un plan auquel toutes les droites sont parallèles, ce qui est le cas du plan  $xy$ . Or les chacune des branches de l'hyperbole équilatère est monotone pour la direction  $x$  ou la direction  $y$  car une hyperbole équilatère est monotone pour n'importe quelle direction ou son orthogonale.

De plus, le PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$  est homéomorphe au plan  $xy$  car toute droite verticale coupe le PHD en un seul point (voir équation 3.1) et les points du trisecteur appartiennent au PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$ . La projection du trisecteur est donc bijective bicontinue et les deux branches du trisecteurs sont monotones par rapport à la direction  $x$  ou la direction  $y$ .  $\square$

Puisqu'on utilise la mise en équation de ce chapitre et les directions  $X$  et  $Y$  sont définies par les droites  $l_1$  et  $l_2$  donc identiques aux directions  $x$  et  $y$  du repère choisi. Le résultat reste vrai pour toute paire de droites puisqu'elles sont toutes parallèles au même plan. Donc la propriété de monotonie est vraie pour cette configuration.

## 3.3 Cellules 2D du diagramme de Voronoï

La cellule 2D de Voronoï d'une paire de droite est une partie du bissecteur de celles-ci. Dans le cas de trois droites, cette partie est bordé par le trisecteur et qui est donc :

- soit composée d'une seule région située à l'intérieur de la courbe du trisecteur, c'est-à-dire entre les branches du trisecteur. Cette région contient alors le point qui se projette dans le plan  $z = 0$  en le centre de l'hyperbole (qui est projection du trisecteur dans ce plan).

– soit composée par l'union des deux régions situées à l'extérieur de la courbe du trisecteur.

Après avoir déterminé quelle est la situation pour chacune des cellules, on parvient à la proposition 2. Pour la démontrer, on utilise le lemme suivant qui permet de discriminer si une cellule est constituée de la région entre les branches du trisecteur ou des régions à l'extérieur. Il sera appliqué à chaque paire de droites dans la démonstration du lemme déterminant leur cellule 2D.

**Lemme 6.** *Soient :*

- trois droites gauches  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$ , toutes parallèles à un même plan
  - $\mathcal{C}_{1,2,3}$  la projection du trisecteur dans le plan  $xy$ , c'est-à-dire une hyperbole de centre  $c_{1,2,3}$  dont on choisit une équation implicite  $f(x, y) = 0$ .
  - $p$  un point sur le bissecteur de  $l_1$  et  $l_2$
  - $p'$  la projection de  $p$  dans le plan  $xy$ .
- Si  $f(p')$  est de même signe que  $f(c_{1,2,3})$  alors :*
- si  $p$  est plus proche de  $l_1$  que de  $l_3$  alors  $\mathcal{V}_{1,2}$  est la partie du bissecteur située entre les deux branches du trisecteur.
  - sinon  $\mathcal{V}_{1,2}$  est l'union des deux composantes à l'extérieur des deux branches du trisecteur.

*Démonstration.* On cherche à déterminer la cellule 2D des droites  $l_1$  et  $l_2$ . Puisque le bissecteur  $\mathcal{H}_{1,2}$  est d'axe  $(Oz)$ , toute droite verticale coupe le PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$  en un point. Donc la projection dans le plan  $xy$  est un homéomorphisme.

De plus on a vu que le trisecteur sépare le bissecteur en deux composantes, l'homéomorphisme maintient cette séparation et l'on ramène l'étude de la cellule 2D à l'étude de la cellule projetée.

Dans le plan  $xy$ , d'après la proposition 1, la projection du trisecteur est une hyperbole équilatère. Celle-ci sépare le plan en deux composantes : celle entre les branches de l'hyperbole et celle à l'extérieur.

Or on sait que le centre de l'hyperbole est entre les deux branches ; tout point dont l'évaluation par  $f$  est de même signe que pour le centre appartient donc à la même composante. Le centre de l'hyperbole permet donc de discriminer ces composantes.

Déterminons maintenant le centre  $c_{1,2,3}$  de l'hyperbole  $\mathcal{C}_{1,2,3}$  et le signe de  $f$  pour celui-ci. Pour ce faire, on utilise la technique décrite dans [LFA88, section III.4] qui consiste à calculer la différentielle de  $f$  en  $x$  et celle en  $y$  puis de déterminer la solution unique du système formé par ces différentielles. Le système obtenu est :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2(\theta^2 - \rho^2)x - 2\rho^2b^2(1 + \theta^2) + 2((1 + \theta^2)\rho - \theta c(1 + \rho^2))y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -2(\theta^2 - \rho^2)y + 2b(1 + \theta^2)y + 2((1 + \theta^2)\rho - \theta c(1 + \rho^2))x \end{cases} \quad (3.9)$$

Et après calculs, on détermine le centre qui vaut :

$$c_{1,2,3} = \frac{1 + \theta^2}{(\rho - \theta c)^2 + (\theta c \rho - \theta^2)^2} (\rho - \theta c, \theta b(\rho c - \theta)) \quad (3.10)$$

Évaluons l'hyperbole en son centre :

$$f(c_{1,2,3}) = \frac{(1 + \theta^2)(1 - c^2)(1 + \rho^2)((\rho\theta c - \theta^2)^2 + (\rho - \theta c)^2 + \theta^2b^2)}{(\rho - \theta c)^2 + (\theta c \rho - \theta^2)^2} \quad (3.11)$$

Examinons le dénominateur, pour qu'il soit égal à zéro il faudrait que  $\rho = \theta c$  et  $\rho = \frac{\theta}{c}$  ce qui a pour conséquence que  $c = \pm 1$  et contredit l'hypothèse  $c > 1$ . Le dénominateur étant donc une somme de carrés strictement positifs, il est donc strictement positif. Le facteur  $((\rho\theta c - \theta^2)^2 + (\rho - \theta c)^2 + \theta^2b^2)$  est strictement positif pour les mêmes raisons. Du fait de l'unique facteur négatif  $1 - c^2$ , le numérateur est strictement négatif et par suite  $f(c_{1,2,3})$  est strictement négatif.

Le point  $p$  se projette en un point  $p'$  dans le plan  $z = 0$ . Si  $f_{1,2,3}(p')$  est strictement négative alors  $p$  appartient à la région située entre les deux branches du trisecteur.

Si le point  $p$  est plus proche des deux droites du bissecteur étudié que de la troisième, cela veut dire que la région située entre les deux branches du trisecteur forme la cellule 2D de ces droites. Sinon

si le point  $p$  est plus proche de la troisième droite alors la cellule 2D est la partie complémentaire du paraboloïde hyperbolique, c'est-à-dire ses régions situées à l'extérieur des deux branches.  $\square$

### 3.3.1 Cellule des droites $l_1$ et $l_2$

**Lemme 7.** *La cellule  $\mathcal{V}_{1,2}$  est la région du PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$  située entre les branches de la courbe du trisecteur.*

*Démonstration.* On prend pour point  $p$  l'origine  $(0, 0, 0)$  qui est bien située sur le bissecteur  $\mathcal{H}_{1,2}$  par construction. L'origine est à distance 1 de  $l_1$  et  $l_2$  et est plus éloigné de  $l_3$  car  $c > 1$ . De plus d'après l'équation de l'hyperbole que l'on a choisi,  $f(0, 0) = (\theta^2 + 1)(\rho^2(1 - c^2) - b^2 - c^2 + 1)$ . Comme par hypothèse  $c > 1$ , la valeur de  $f$  à l'origine est strictement négative.

Donc d'après le lemme 6, la cellule 2D des droites  $l_1$  et  $l_2$  est donc la région du bissecteur  $\mathcal{H}_{1,2}$  située à l'intérieur de la courbe du trisecteur.  $\square$

### 3.3.2 Cellule des droites $l_1$ et $l_3$

**Lemme 8.** *La cellule  $\mathcal{V}_{1,3}$  est la région du PHD  $\mathcal{H}_{1,3}$  située à l'extérieur des deux branches de la courbe du trisecteur.*

*Démonstration.* Soit le point  $p = (0, 0, d)$  qui se trouve sur le bissecteur de  $l_1$  et  $l_3$ , on peut calculer ce  $d$  et l'on obtient alors :

$$d = \frac{1}{2} \frac{(c^2 - 1)(\rho^2 + 1) + b^2}{(\rho^2 + 1)(1 + c)}$$

Puisque  $c > 1$ ,  $d$  est clairement strictement positif donc ce point est plus proche de la droite  $l_2$  pour laquelle  $z = 1$  que la droite  $l_1$  pour laquelle  $z = -1$  par construction. La projection  $p'$  de  $p$  dans le plan  $z = 0$  est l'origine, or on a vu que  $f(0, 0)$  est strictement négative.

Donc d'après le lemme 6, la cellule 2D des droites  $l_1$  et  $l_3$  est la partie composée par l'union des deux régions situées à l'extérieur de la courbe du trisecteur.  $\square$

### 3.3.3 Cellule des droites $l_2$ et $l_3$

**Lemme 9.** *La cellule  $\mathcal{V}_{2,3}$  est la région du PHD  $\mathcal{H}_{2,3}$  située entre les branches de la courbe du trisecteur.*

*Démonstration.* Soit le point  $p = (0, 0, d)$  qui se trouve sur le bissecteur de  $l_2$  et  $l_3$ , on peut calculer ce  $d$  et l'on a :

$$d = \frac{1}{2} \frac{(c^2 - 1)(\rho^2 + 1) + b^2}{(\rho^2 + 1)(c - 1)}$$

Puisque  $c > 1$ ,  $d > 0$  donc ce point est plus proche des droites  $l_2$  et  $l_3$  que de la droite  $l_1$  pour laquelle  $z = -1$ .

Donc d'après le lemme 6, la cellule 2D des droites  $l_2$  et  $l_3$  est la région du bissecteur située à l'intérieur de la courbe du trisecteur.  $\square$

## Chapitre 4

# Deux droites parallèles, la troisième leur étant gauche

Dans cette configuration, les deux droites gauches ont un bissecteur qui est un paraboloidé hyperbolique et les droites parallèles ont un bissecteur qui est un plan. Étudier le trisecteur revient donc à étudier l'intersection entre un plan et un paraboloidé hyperbolique droit, ce que l'on fera de manière générale dans le lemme 10 avant de l'appliquer à notre problème. On démontrera alors les deux propositions suivantes :

**Proposition 3.** *Soient les droites  $l_1$  et  $l_2$  gauches et  $l_1$  et  $l_3$  parallèles. Si les droites sont toutes parallèles à un même plan alors le trisecteur  $\mathcal{H}_{1,2,3}$  est une parabole. Sinon le trisecteur  $\mathcal{H}_{1,2,3}$  est une hyperbole dont la projection  $\mathcal{C}$  dans le plan  $xy$  est une hyperbole équilatère.*

**Proposition 4.** *Soient les droites  $l_1$  et  $l_2$  gauches ; les droites  $l_1$  et  $l_3$  parallèles. On définit  $l_1$  comme étant au-dessus de  $l_2$ . Les cellules 2D du diagramme de Voronoï de ces droites sont :*

- La cellule des droites  $l_1$  et  $l_2$  est la région de leur bissecteur qui est un PHD qui se trouve dans le demi-espace contenant la droite  $l_1$  bordé par le plan bissecteur des droites parallèles  $l_1$  et  $l_3$ .
- La cellule des droites  $l_2$  et  $l_3$  est la région de leur bissecteur qui est un PHD qui se trouve dans le demi-espace contenant la droite  $l_3$  bordé par le plan bissecteur des droites parallèles  $l_1$  et  $l_3$ .
- La cellule  $\mathcal{V}_{1,3}$  des droites  $l_1$  et  $l_3$  est une région de leur plan bissecteur  $\mathcal{H}_{1,3}$ . On considère  $\mathcal{P}$  le plan formé par les droites  $l_1$  et  $l_3$ .
  - Si les trois droites sont parallèles à un même plan alors  $\mathcal{V}_{1,3}$  est la partie du plan au-dessus de la parabole du trisecteur.
  - Si les trois droites ne sont pas toutes parallèles à un même plan et si la droite  $l_3$  est au-dessus de la droite  $l_2$  alors  $\mathcal{V}_{1,3}$  est la région du plan  $\mathcal{H}_{1,3}$  située entre les deux branches de l'hyperbole  $\mathcal{H}_{1,2,3}$ .
  - Si les trois droites ne sont pas toutes parallèles à un même plan est en-dessous de la droite  $l_2$  alors  $\mathcal{V}_{1,3}$  est l'union des régions du plan  $\mathcal{H}_{1,3}$  situées à l'extérieur des deux branches de l'hyperbole  $\mathcal{H}_{1,2,3}$ .

Nous allons maintenant mettre en équation cette configuration de droites puis étudier de manière générale l'intersection d'un paraboloidé hyperbolique et d'un plan. Nous continuerons alors par l'étude du trisecteur et enfin par la détermination des cellules 2D du diagramme de Voronoï.

### 4.1 Mise en équation du problème

Soient trois droites distinctes tels que  $l_1$  et  $l_2$  soient gauches et que  $l_3$  soit parallèle à  $l_1$ . Pour tout tel triplet de droites, on peut toujours trouver un système de coordonnées cartésiennes orthonormé  $(x, y, z)$  au besoin à l'aide d'une isométrie et d'une homothétie tel que :

- la droite  $l_1$  soit définie par le point  $p_1 = (0, 0, 1)$  et le vecteur  $v_1 = (1, \theta, 0)$ .
- la droite  $l_2$  soit définie par le point  $p_2 = (0, 0, -1)$  et le vecteur  $v_2 = (1, -\theta, 0)$ .
- la droite  $l_3$  soit définie par le point  $p_3 = (a, 0, c)$  et le vecteur  $v_3 = (1, \theta, 0)$ .

–  $a, c, \theta \in \mathbb{R}, \theta > 0, \theta \leq 1, c \neq 1$ , si  $c = 1$  alors  $a \neq 0$ .

En effet, les droites  $l_1$  et  $l_2$  étant gauches, on choisit le repère  $(x, y, z)$  comme pour le cas précédent. On affine les contraintes sur la paramétrisation en posant que  $\theta \leq 1$  parce que cette variable représente l'écart entre ces deux droites et en inversant si nécessaire les coordonnées  $x$  et  $y$ , on a toujours un angle  $\theta$  aigu ou droit. La droite  $l_3$  est parallèle à  $l_1$  donc leurs vecteurs directeurs sont colinéaires et on les choisit égaux. Puisque  $\theta$  n'est jamais nul,  $l_3$  coupe le plan  $xz$  en un point  $(a, 0, c)$ .

De plus, on peut remarquer que  $c \neq -1$  sinon  $l_2$  et  $l_3$  seraient coplanaires. De même si  $c = 1$  alors  $a \neq 0$  sinon  $l_1$  et  $l_3$  seraient confondues.

## 4.2 Intersection d'un paraboloidé hyperbolique et d'un plan

Pour comprendre la géométrie du trisecteur, nous étudions l'intersection de deux des trois bissecteurs. Le bissecteur des droites  $l_1$  et  $l_2$ ,  $\mathcal{H}_{1,2}$ , est un paraboloidé hyperbolique droit d'après le lemme 1. Le bissecteur des droites  $l_1$  et  $l_3$ ,  $\mathcal{H}_{1,3}$ , est un plan puisque ces droites sont parallèles.

Étudier le trisecteur revient donc à étudier l'intersection d'un plan et d'un paraboloidé hyperbolique droit. D'une manière générale, l'intersection d'un plan et d'une quadrique non dégénérée est une conique, mais il reste à déterminer quels sont les différents types possibles et quand ils surviennent.

**Lemme 10.** *Soient un paraboloidé hyperbolique droit PHD et un plan  $P$ . On choisit un repère dans lequel le PHD est d'axe  $(Oz)$  et d'équation  $z = \nu xy$ . Le plan  $P$  a pour équation  $Ax + By + Cz + D = 0$ . L'intersection du PHD et  $P$  est une conique  $\mathcal{C}$  dont le type est décrit comme suit :*

1. si  $P$  est parallèle à l'axe du PHD et

(a) si  $A \neq 0$  et  $B \neq 0$ , c'est-à-dire si  $P$  n'est ni parallèle à l'axe  $(Ox)$  ni à l'axe  $(Oy)$ , alors  $\mathcal{C}$  est une parabole

(b) sinon  $\mathcal{C}$  est une droite

2. si  $P$  n'est pas parallèle à l'axe du PHD, on simplifie l'équation de  $P$  en  $z = -2A'x - 2B'y - D'$ . La projection sur le plan  $xy$  de  $\mathcal{C}$  est une conique de matrice associée  $R$  :

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\nu}{2} & A' \\ \frac{\nu}{2} & 0 & B' \\ A' & B' & D' \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, on a :

(a) soit  $\det(R) \neq 0$  alors  $\mathcal{C}$  est une hyperbole.

(b) soit  $\det(R) = 0$  alors  $\mathcal{C}$  consiste en deux droites sécantes.

*Démonstration.* 1. Si  $P$  est parallèle à l'axe  $(Oz)$ , alors  $C$  est nul. Séparons en deux-sous cas :

– soit  $A \neq 0$  et l'on peut simplifier l'équation de  $P$  en  $x = B'y + D'$  avec  $B' = -\frac{B}{A}$  et  $D' = -\frac{D}{A}$ . En remplaçant  $x$  à l'aide de cette équation dans l'équation du PHD, on obtient après simplification le système suivant décrivant  $\mathcal{C}$  :

$$\begin{cases} z = \nu B'y^2 + \nu D'y \\ x = B'y + D' \end{cases}$$

Si  $B' \neq 0$  c'est-à-dire  $B \neq 0$ , on a l'intersection entre un cylindre parabolique d'axe  $(Ox)$  et un plan non parallèle à cet axe et donc  $\mathcal{C}$  est une parabole. Si  $B' = 0$  c'est-à-dire  $B = 0$ , on a l'intersection de deux plans qui ne sont pas parallèles donc c'est une droite.

– soit  $A = 0$ , l'équation du plan peut s'écrire  $y - D' = 0$  et l'on obtient le système suivant pour  $\mathcal{C}$  :

$$\begin{cases} z = \nu D'x \\ y = D' \end{cases}$$

Là encore, on a l'intersection de deux plans qui ne sont pas parallèles donc c'est une droite.



2. Si  $P$  n'est pas parallèle à l'axe  $(Oz)$ , alors  $C$  n'est pas nul. On peut donc réécrire l'équation de  $P$  sous la forme :  $z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C}$ . Si l'on considère la projection dans le plan  $xy$  de  $\mathcal{C}$ , on obtient l'équation suivante :  $\nu xy + \frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + \frac{A}{C} = 0$ . Selon la classification des coniques affines établie dans [Del00, section 9.4], on considère les matrices  $Q$  et  $R$  :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \nu \\ \nu & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\nu}{2} & \frac{A}{2C} \\ \frac{\nu}{2} & 0 & \frac{B}{2C} \\ \frac{A}{2C} & \frac{B}{2C} & \frac{D}{C} \end{bmatrix}$$

Le déterminant de  $Q$  vaut  $-\frac{\nu^2}{4}$ , il est strictement négatif puisque  $\nu \neq 0$ . De plus,  $Q$  a deux valeurs propres :  $-\nu$  et  $\nu$  qui sont de signes opposés donc la signature de  $Q$  est  $(1, 1)$ . Quant au déterminant de  $R$  il vaut :  $\frac{-\nu(\nu DC - AB)}{4C^2}$ . Puisque  $C$  et  $\nu$  ne sont pas nuls, le déterminant de  $R$  est nul si et seulement si  $\nu DC = AB$ .

Lorsque le déterminant de  $R$  est nul, son rang est inférieur ou égal à deux. Mais il ne peut être inférieur à 2 puisque  $Q$  qui est une sous-matrice de  $R$  est de rang 2, il est donc de 2. Le déterminant de  $Q$  est strictement négatif et le rang de  $R$  vaut 2 donc d'après la classification de [Del00] la projection dans le plan  $xy$  de  $\mathcal{C}$  est deux droites sécantes. Or il n'existe pas d'autre conique que deux droites sécantes qui puisse se projeter en deux droites sécantes donc lorsque le déterminant de  $R$  est nul,  $\mathcal{C}$  est deux droites sécantes.

Lorsque le déterminant de  $R$  est non nul, son rang est maximal et il vaut donc 3. Le déterminant de  $Q$  est strictement négatif et le rang de  $R$  est maximal donc d'après la classification de [Del00] la projection dans le plan  $xy$  de  $\mathcal{C}$  est une hyperbole. Comme cette projection est une conique non dégénérée, la conique  $\mathcal{C}$  est du même type que sa projection. Donc lorsque le déterminant de  $R$  est non nul,  $\mathcal{C}$  est une hyperbole. □

### 4.3 Étude du trisecteur

Le bissecteur  $\mathcal{H}_{1,3}$  des droites  $l_1$  et  $l_3$  est un plan. Celui de  $l_1$  et  $l_2$ ,  $\mathcal{H}_{1,2}$  est parabolôïde hyperbolique droit. Le trisecteur  $\mathcal{H}_{1,2,3}$  est l'intersection de  $\mathcal{H}_{1,2}$  et  $\mathcal{H}_{1,3}$ , on peut donc appliquer le lemme 10 pour l'étudier.

La démonstration de la proposition 3 est décomposée en les lemmes suivants de cette sous-section. Pour commencer, nous exprimons les équations des objets utilisés. L'équation du bissecteur des droites  $l_1$  et  $l_2$  est de la forme :

$$\mathcal{H}_{1,2}(x, y, z) : z = \frac{-\theta}{1 + \theta^2}xy \quad (4.1)$$

L'équation choisie du bissecteur des droites  $l_1$  et  $l_3$  est :

$$\mathcal{H}_{1,3}(x, y, z) : -2a\theta^2x + 2a\theta y + 2(1 - c)(\theta^2 + 1)z + (1 + \theta^2)(c^2 - 1) + \theta^2a^2 = 0 \quad (4.2)$$

**Lemme 11.** *Le plan  $\mathcal{P}$  formé par les droites  $l_1$  et  $l_3$  est parallèle au plan  $xy$  si et seulement si le plan  $\mathcal{H}_{1,3}$  est parallèle à l'axe  $(Oz)$  (ce qui est équivalent à  $c = 1$ )*

*Démonstration.* Dans l'équation 4.2 du plan  $\mathcal{H}_{1,3}$ , le coefficient en  $z$  vaut  $2(1 - c)(1 + \theta^2)$ . Il est nul si et seulement si  $c = 1$ . Donc le plan  $\mathcal{H}_{1,3}$  est parallèle à l'axe  $(Oz)$  si et seulement si  $c = 1$ .

Notons  $n_P = (i, j, k)$  le vecteur normal de  $\mathcal{P}$  et  $n_H = (u, v, w)$  le vecteur normal de  $\mathcal{H}_{1,3}$ . Le plan bissecteur de deux droites est perpendiculaire au plan formé par ces droites d'où  $n_P \cdot n_H = 0$ .

Si  $\mathcal{P}$  est parallèle au plan  $xy$  alors  $n_P = (0, 0, k)$  avec  $k$  non nul. Or  $n_P \cdot n_H = k \cdot w = 0$ , comme  $k \neq 0$  on obtient  $w = 0$ . Donc  $n_H$  est de la forme  $(u, v, 0)$  avec  $(u, v) \neq (0, 0)$  donc  $\mathcal{H}_{1,3}$  est parallèle à l'axe  $(Oz)$ .

Si  $\mathcal{H}_{1,3}$  est parallèle à l'axe  $(Oz)$  alors  $n_H$  est de la forme  $(u, v, 0)$  avec  $u$  et  $v$  non tous deux nuls. De plus, par définition le plan  $\mathcal{P}$  contient la direction  $v_1$  donc le vecteur normal de  $\mathcal{P}$  est perpendiculaire

au vecteur  $v_1$ . On a alors  $n_P.v_1 = i + j\theta = 0$ , d'où  $i = -j\theta$ . On a alors  $n_P.n_H = (i, j, k).(u, v, 0) = iu + jk = 0$ . Avec  $i = -j\theta$ , on développe et simplifie en  $n_P.n_H = j(-\theta u + v) = 0$ . Donc soit  $j$  est nul, soit  $v = \theta u$ . Si  $v = \theta u$  alors  $n_H = (u, u\theta, 0) = uv_1$ . Mais par définition  $\mathcal{H}_{1,3}$  est parallèle à  $v_1$  et  $n_H$  est orthogonal à tout vecteur du plan  $\mathcal{H}_{1,3}$ ,  $n_H$  ne peut être colinéaire à  $v_1$ . Le cas où  $v = \theta u$  est impossible. Si  $j = 0$ , alors  $i = -j\theta = 0$  donc  $n_P = (0, 0, k)$  avec  $k$  non nul et  $\mathcal{P}$  est bien parallèle au plan  $xy$ . □

**Lemme 12.** *Si le plan  $\mathcal{P}$  formé par les droites  $l_1$  et  $l_3$  est parallèle au plan  $xy$  (ce qui équivaut à  $c = 1$ ) alors le trisecteur  $\mathcal{H}_{1,2,3}$  est une parabole concave dans le plan  $\mathcal{H}_{1,3}$ .*

*Démonstration.* Si  $c = 1$ , on a que le plan  $\mathcal{P}$  est parallèle au plan  $xy$ , comme la droite  $l_2$ . D'après le lemme 10, le trisecteur est une parabole ou une droite dans le cas dégénéré. Pour que le trisecteur soit une droite il faut que le coefficient en  $x$  ou le coefficient en  $y$  de l'équation 4.2 soit nul, ce qui équivaut à soit  $-2a\theta^2 = 0$ , soit  $2a\theta = 0$ . Mais par hypothèse  $\theta \neq 0$  et si  $a = 0$  alors les points  $p_1$  et  $p_3$  sont confondus ce qui entraîne que les droites  $l_1$  et  $l_3$  soient confondues contrairement aux hypothèses de départ.

Le trisecteur ne peut donc pas être une droite. Donc lorsque les trois droites sont parallèles à un même plan, le trisecteur est une parabole dans ce plan. En exprimant  $x$  en fonction de  $y$  à l'aide de l'équation de  $\mathcal{H}_{1,3}$  et en l'injectant dans l'équation de  $\mathcal{H}_{1,2}$ , on obtient une équation de  $\mathcal{H}_{1,2,3}$  projetée dans le plan  $yz$  :

$$\mathcal{C} : z = -\frac{1}{2(1+\theta^2)}(2y^2 + \theta ay) \quad (4.3)$$

Puisque le coefficient dominant du polynôme définissant  $\mathcal{C}$  est strictement négatif,  $\mathcal{C}$  est concave. La projection entre  $\mathcal{H}_{1,3}$  et le plan  $yz$  n'est pas dégénérée donc dans le plan  $\mathcal{H}_{1,3}$ , la parabole  $\mathcal{H}_{1,2,3}$  est concave. □

Nous montrons ce lemme auxiliaire suivant qui sera utilisé pour la démonstration du lemme 14.

**Lemme 13.** *Une hyperbole décrite par une équation implicite de la forme  $Axy + Bx + Cy + D = 0$  avec  $A \neq 0$  est une hyperbole équilatère.*

*Démonstration.* Considérons la matrice  $Q$  de la forme quadratique de cette hyperbole :

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Les vecteurs propres de  $Q$  sont  $u = (1, 1)$  et  $v = (1, -1)$ . Ces vecteurs sont orthogonaux car leur produit scalaire  $u.v$  est nul. Or on sait que les vecteurs propres de  $Q$  donnent les directions des axes principaux, elles sont orthogonales donc l'hyperbole est équilatère. □

Nous pouvons maintenant caractériser le trisecteur lorsque les trois droites ne sont pas parallèles à un même plan, c'est-à-dire lorsque le plan formé par les droites  $l_1$  et  $l_3$  n'est pas parallèle au plan  $xy$ .

**Lemme 14.** *Si le plan  $\mathcal{P}$  formé par les droites  $l_1$  et  $l_3$  n'est pas parallèle au plan  $xy$  (ce qui équivaut à  $c \neq 1$ ) alors le trisecteur  $\mathcal{H}_{1,2,3}$  est une hyperbole dont la projection  $\mathcal{C}$  dans le plan  $xy$  est une hyperbole équilatère.*

*Démonstration.* D'après le lemme 10 cas 2, le trisecteur est une hyperbole sauf dans le cas dégénéré pour lequel le déterminant de  $R$  est nul. Après calcul et simplification, on obtient l'expression suivante pour ce déterminant :

$$\det(R) = \theta^2(c^2 - 1)((1 + \theta^2)(c - 1)^2 + \theta^2 a^2) \quad (4.5)$$

Déterminons sous quelles conditions ce déterminant est nul. Le premier facteur  $\theta$  n'est pas nul puisque  $\theta \neq 0$  par hypothèse. Le deuxième facteur  $c^2 - 1$  est nul si  $c = 1$  ou si  $c = -1$ . Par hypothèse  $c \neq 1$  et si  $c = -1$  alors les droites  $l_2$  et  $l_3$  seraient dans le même plan  $z = -1$  ce qui contredit l'hypothèse qu'elles soient gauches. Donc le deuxième facteur n'est pas nul. Le troisième facteur  $(1+\theta^2)(c-1)^2 + \theta^2 a^2$  est une somme de deux carrés. Puisque  $c \neq 1$ , le premier carré est strictement positif donc la somme des deux carrés est strictement positive. On en conclut donc que le cas dégénéré n'est pas possible dans la configuration des droites  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  du cas étudié puisque le déterminant de  $R$  n'est jamais nul.

On a donc que le trisecteur  $\mathcal{H}_{1,2,3}$  est une hyperbole. Examinons maintenant la projection  $\mathcal{C}$  du trisecteur dans le plan  $xy$ . Puisque  $\mathcal{H}_{1,3}$  n'est pas parallèle à l'axe  $(Oz)$ , il n'est pas perpendiculaire au plan  $xy$  donc la projection n'est pas dégénérée et par suite  $\mathcal{C}$  est une hyperbole. De plus, on écrit une équation implicite de  $\mathcal{C}$  :

$$2\theta(1-c)xy + 2\theta^2 ax - 2\theta ay + (1-c^2)(\theta^2 + 1) - \theta^2 a^2 \quad (4.6)$$

Puisque  $c \neq 1$ , le coefficient en  $xy$  n'est pas nul. Par contre, il n'y a pas de coefficient en  $x^2$  ou en  $y^2$  donc d'après le lemme 13,  $\mathcal{C}$  est une hyperbole équilatère. □

Nous allons maintenant démontrer la propriété de monotonie pour deux droites gauches et deux droites sécantes. D'après la définition ??, ce sont les bissecteurs des droites  $l_1$  et  $l_2$ , donc les directions  $x$  et  $y$  de la mise en équation, sont les directions  $X$  et  $Y$ .

**Lemme 15.** *Soient deux droites gauches, deux droites parallèles, toutes les branches du trisecteur sont monotones par rapport à la direction  $X$  (ou par rapport à la direction  $Y$ ).*

*Démonstration.* Si toutes les droites ne sont pas parallèles à un même plan d'après le lemme 14, le trisecteur est une hyperbole et sa projection dans le plan  $xy$  est une hyperbole équilatère. La démonstration est la même que pour le lemme 5.

Si toutes les droites sont parallèles à un même plan, d'après le lemme ??, le trisecteur est un parabole dans le plan  $\mathcal{H}_{1,3}$ . Or si on considère la projection de cette parabole dans le plan  $xy$ , on obtient une droite et une droite est monotone par rapport à la direction  $x$  ou la direction  $y$ . De plus la projection de la parabole du trisecteur dans le plan  $xy$  est bijective bicontinue donc la branche du trisecteur est monotone par rapport à la direction  $X$  ou à la direction  $Y$ . □

## 4.4 Cellules 2D du diagramme de Voronoï

Dans cette section, nous décrivons le diagramme de Voronoï de trois droites dont une paire est gauche et une paire parallèle. Le bissecteur des droites parallèles est un plan et donc les cellules bordé par le plan sont simples. La cellule des droites parallèles est planaire et comme on a vu précédemment le trisecteur est soit une parabole soit une hyperbole dans ce plan, chaque cas devra donc être étudié séparément. On obtient la proposition 4 que nous allons démontrer dans les sous-sections ci-dessous.

### 4.4.1 Cellule des droites $l_1$ et $l_2$

**Lemme 16.** *La cellule  $\mathcal{V}_{1,2}$  est la partie du PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$  qui se trouve dans le demi-espace contenant la droite  $l_1$  bordé par le plan  $\mathcal{H}_{1,3}$ .*

*Démonstration.* On sait que le bissecteur  $\mathcal{H}_{1,2}$  de  $l_1$  et  $l_2$  est un paraboloïde hyperbolique droit. La question de savoir quels sont les points de  $\mathcal{H}_{1,2}$  qui sont plus loins de  $l_3$  que de  $l_1$  ou  $l_2$  est résolue en utilisant le plan bissecteur de  $l_1$  et  $l_3$ . Donc la cellule 2D de  $l_1$  et  $l_2$  est la partie du PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$  qui se trouve dans le demi-espace bordé par  $\mathcal{H}_{1,3}$  contenant  $l_1$ . □

#### 4.4.2 Cellule des droites $l_2$ et $l_3$

**Lemme 17.** *La cellule  $\mathcal{V}_{2,3}$  est la partie du PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$  qui se trouve dans le demi-espace contenant la droite  $l_3$  bordé par le plan  $\mathcal{H}_{1,3}$ .*

*Démonstration.* Même raisonnement que pour les droites  $l_1$  et  $l_2$ . □

#### 4.4.3 Cellule des droites $l_1$ et $l_3$

Puisque les droites  $l_1$  et  $l_3$  sont parallèles, on sait que leur bissecteur  $\mathcal{H}_{1,3}$  est un plan. La cellule 2D de ces droites est donc le plan dont on a ôté la partie plus proche de la droite  $l_2$ . Or nous avons vu que le trisecteur peut être une parabole ou une hyperbole selon que le plan  $\mathcal{P}$  soit parallèle au plan  $xy$  ou pas. Nous allons donc étudier ces deux configurations.

**Lemme 18.** *Si  $\mathcal{P}$  est parallèle au plan  $xy$  alors  $\mathcal{V}_{1,3}$  est la partie du plan  $\mathcal{H}_{1,3}$  au-dessus de la parabole du trisecteur.*

*Démonstration.* Le plan  $\mathcal{H}_{1,3}$ , bissecteur des droites  $l_1$  et  $l_3$ , contient l'axe  $(Oz)$  donc ce plan est décrit par un point et les vecteurs  $v = (0, 0, 1)$  et  $v_1$  qui sont linéairement indépendant puisque orthogonaux. Puisque le vecteur  $v_2$  ne peut être exprimer par une combinaison linéaire de  $v$  et  $v_1$ , la droite  $l_2$  coupe le plan  $\mathcal{H}_{1,3}$  en un point  $p$ .

Remarquons que puisque le PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$  est d'axe  $(Oz)$ , toute droite verticale le coupe donc en un unique point. De plus, par construction la droite  $l_2$  est sous le PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$ . Considérons maintenant la droite verticale passant par le point  $p$  : elle rencontre la droite  $l_2$  avant le PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$ , donc la partie du plan  $\mathcal{H}_{1,3}$  sous la parabole du trisecteur est plus proche de  $l_2$  que de  $l_1$ . On en conclut que la cellule  $\mathcal{V}_{1,3}$  est la partie du plan  $\mathcal{H}_{1,3}$  au-dessus de la parabole  $\mathcal{H}_{1,2,3}$ . □

**Lemme 19.** *Soit  $\mathcal{P}$  non parallèle au plan  $xy$ .*

- *Si la droite  $l_3$  est au-dessus de  $l_2$  (ce qui équivaut à  $c > -1$ ) alors  $\mathcal{V}_{1,3}$  est la région du plan  $\mathcal{H}_{1,3}$  située entre les deux branches de l'hyperbole  $\mathcal{H}_{1,2,3}$ .*
- *Si la droite  $l_3$  est en-dessous de la droite  $l_2$  (ce qui équivaut à  $c < -1$ ) alors  $\mathcal{V}_{1,3}$  est l'union des régions du plan  $\mathcal{H}_{1,3}$  situées à l'extérieur des deux branches de l'hyperbole  $\mathcal{H}_{1,2,3}$ .*

*Démonstration.* On suppose que  $\mathcal{P}$  n'est pas parallèle au plan  $xy$  donc d'après le lemme 14, on a  $c \neq 1$  et le trisecteur  $\mathcal{H}_{1,2,3}$  est une hyperbole dont la projection  $\mathcal{C}$  dans le plan  $xy$  est une hyperbole équilatère.

La projection sur la plan  $xy$  restreinte au plan  $\mathcal{H}_{1,3}$  n'est pas dégénérée car ces plans ne sont pas perpendiculaires d'après le lemme 11. Cette restriction de la projection est donc inversible et on obtient son inverse en gardant les coordonnées  $x$  et  $y$  d'un point projeté et en calculant l'altitude  $z$  avec l'équation du plan  $\mathcal{H}_{1,3}$ . De plus, le centre d'une hyperbole est le point d'intersection de ses axes principaux et la projection conserve les intersections de droites. Donc le centre  $c_{1,2,3}$  de l'hyperbole  $\mathcal{H}_{1,2,3}$  se projette en le centre  $c'_{1,2,3}$  de l'hyperbole projetée  $\mathcal{C}$ . On calcule donc les coordonnées de  $c_{1,2,3}$  par la projection inverse de  $c'_{1,2,3}$ . Ainsi on obtient la valeur de  $c_{1,2,3}$  :

$$c_{1,2,3} = \frac{1}{c-1} \left( -a, \theta a, \frac{(1+\theta^2)(c^2-1)(c-1) + \theta^2 a^2 (c+3)}{(1+\theta^2)(c-1)} \right) \quad (4.7)$$

Puis on calcule la distance au carré entre le point  $c_{1,2,3}$  et la droite  $l_1$  et entre le point  $c_{1,2,3}$  et la droite  $l_2$ . On étudie ensuite la différence entre ces deux distances qui vaut :

$$d^2(c_{1,2,3}, l_1) - d^2(c_{1,2,3}, l_2) = -\frac{2(c+1)((1+\theta^2)(c-1)^2 + \theta^2 a^2)}{(1+\theta^2)(c-1)^2} \quad (4.8)$$

Le dénominateur  $(1+\theta^2)(c-1)^2$  et le facteur  $(1+\theta^2)(c-1)^2 + \theta^2 a^2$  sont strictement positifs car  $c \neq 1$ . Donc le signe de cette différence est le signe de  $-2(c+1)$ .

Si  $c > -1$ , la différence est négative ce qui veut dire que  $c_{1,2,3}$  est plus proche de  $l_1$  que de  $l_2$ . Donc si  $c > -1$ , la cellule  $\mathcal{V}_{1,3}$  est la région du plan  $\mathcal{H}_{1,3}$  située entre les deux branches du trisecteur.

Si  $c < -1$ , la différence est positive donc le point  $c_{1,2,3}$  est plus proche de la droite  $l_2$  que de la droite  $l_1$ . Donc la partie du plan entre les deux branches du trisecteur n'appartient pas à  $\mathcal{V}_{1,2}$ . Donc si  $c < -1$ , la cellule  $\mathcal{V}_{1,3}$  est l'union des régions situées à l'extérieur des branches de l'hyperbole  $\mathcal{H}_{1,2,3}$ .  $\square$

## Chapitre 5

# Trois droites parallèles à un même plan dont deux concourantes

Dans cette configuration, les deux paires de droites gauches ont un bissecteur qui est un paraboloïde hyperbolique droit. En revanche, la paire de droites sécantes a un bissecteur que nous n'avons pas encore étudié, à savoir deux plans. Ces plans sont liés et nous pourrions exploiter ce lien pour réutiliser partiellement le travail du chapitre précédent ce qui permettra de déterminer la nature du trisecteur. Comme les trois droites sont parallèles à un même plan, le trisecteur est une hyperbole dans chacun de ces plans et les cellules 2D seront déterminées avec les mêmes techniques que pour le chapitre précédent. Outre la propriété de monotonie, nous montrerons les résultats suivants :

**Proposition 5.** *Soient les droites  $l_1$  et  $l_2$  gauches ; les droites  $l_1$  et  $l_3$  sécantes. Si les trois droites sont parallèles à un même plan alors le trisecteur est composé d'une parabole dans chaque plan de  $\mathcal{H}_{1,3}$ .*

**Proposition 6.** *Soient les droites  $l_1$  et  $l_2$  gauches ; les droites  $l_1$  et  $l_3$  sécantes. Si toutes les droites sont parallèles à un même plan les cellules 2D du diagramme de Voronoï sont :*

- La cellule des droites sécantes  $l_1$  et  $l_3$  est comprise dans bissecteur de ces droites qui est formé par deux plans. Dans chacun des plans, c'est la région située au-dessus de la parabole qui appartient à la cellule 2D.
- La cellule des droites gauches  $l_1$  et  $l_2$  est l'union des deux régions du PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$  appartenant aux régions de l'espace plus proche de  $l_1$  que de  $l_3$  délimité par le bissecteur  $\mathcal{H}_{1,3}$ .
- La cellule des droites gauches  $l_2$  et  $l_3$  est de même nature que celle de  $l_1$  et  $l_3$ .

### 5.1 Mise en équation du problème

Soient trois droites  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  telles que les droites  $l_1$  et  $l_3$  soient concourantes tandis que  $l_2$  leur soit gauche. Puisque les droites  $l_1$  et  $l_2$  sont gauches, le bissecteur  $\mathcal{H}_{1,2}$  de  $l_1$  et  $l_2$  est un paraboloïde hyperbolique droit ; puisque les droites  $l_1$  et  $l_3$  sont quant à elles sécantes leur bissecteur  $\mathcal{H}_{1,3}$  est constitué de deux plans. Suivant les aspects que l'on étudie, il est intéressant de rendre simple soit l'expression de l'équation du PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$  ou soit celle des plans de  $\mathcal{H}_{1,3}$ . Nous utilisons donc deux mises en équation du problème.

D'une part, la paramétrisation  $P_1$  pour laquelle c'est l'expression du bissecteur  $\mathcal{H}_{1,2}$  qui est la plus simple. Pour un triplet de droites respectant les conditions sus-citées, on peut toujours trouver un système de coordonnées cartésiennes orthonormé  $(x, y, z)$  au besoin à l'aide d'une isométrie et d'une homothétie tel que :

- la droite  $l_1$  soit définie par le point  $p_1 = (0, 0, 1)$  et le vecteur  $v_1 = (1, \theta, 0)$ .
- la droite  $l_2$  soit définie par le point  $p_2 = (0, 0, -1)$  et le vecteur  $v_2 = (1, -\theta, 0)$ .
- la droite  $l_3$  soit définie par le point  $p_3 = (\lambda, \lambda\theta, 1)$  et le vecteur  $v_3 = (\alpha, \beta, \gamma)$
- $\alpha, \beta, \gamma, \theta \in \mathbb{R}$ ,  $\theta > 0$ ,  $v_3$  différent de  $v_1$  ;  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  de même norme.

Cette mise en équation est identique aux précédentes pour les deux premières droites  $l_1$  et  $l_2$ . Quant à la troisième droite  $l_3$  elle coupe la droite  $l_1$  en un point  $p_3$  défini par  $p_1 + \lambda v_1$  et son vecteur directeur

$v_3$  est différent de  $v_1$  et  $v_2$ . Dans cette paramétrisation, l'équation du bissecteur  $\mathcal{H}_{1,2}$  est  $z = \frac{-\theta}{1+\theta^2}xy$ , comme pour les cas précédemment étudiés.

D'autre part, la paramétrisation  $P_2$  pour laquelle c'est l'expression du bissecteur  $\mathcal{H}_{1,3}$  qui est la plus simple. Pour un triplet de droites respectant les conditions sus-citées, on peut toujours trouver un système de coordonnées cartésiennes orthonormé  $(x', y', z')$  au besoin à l'aide d'une isométrie et d'une homothétie tel que :

- la droite  $l_1$  soit définie par le point  $p_1 = (0, 0, 0)$  et le vecteur  $v_1 = (1, \phi, 0)$ .
- la droite  $l_2$  soit définie par le point  $p_2 = (d, e, 0)$  et le vecteur  $v_2 = (\alpha', \beta', \gamma')$ .
- la droite  $l_3$  soit définie par le point  $p_3 = (0, 0, 0)$  et le vecteur  $v_3 = (1, -\phi, 0)$ .
- $\alpha', \beta', \gamma', \phi \in \mathbb{R}$ ,  $\phi > 0$ ,  $v_3$  différent de  $v_1$  et de  $v_2$ ;  $v_1, v_2$  et  $v_3$  de même norme.

Dans la paramétrisation  $P_2$ , on centre le repère sur l'intersection des droites  $l_1$  et  $l_3$  et à l'aide d'une rotation et d'une homothétie on exprime les vecteurs  $v_1$  et  $v_3$  d'une manière similaire aux droites  $l_1$  et  $l_2$  dans la paramétrisation  $P_1$ . Puisque par définition la droite  $l_2$  est gauche à  $l_1$  et  $l_3$ , elle coupe le plan  $xy$  en un point  $p_2 = (d, e, 0)$ . Son vecteur  $v_2$  n'a pour seule contrainte que d'être différent de  $v_1$  et  $v_3$ . Dans cette paramétrisation, le bissecteur  $\mathcal{H}_{1,3}$  est constitué de deux plans d'équations  $x = 0$  et  $y = 0$ .

## 5.2 Étude du trisecteur

Le bissecteur  $\mathcal{H}_{1,3}$  des droites  $l_1$  et  $l_3$  est constitué de deux plans. Celui de  $l_1$  et  $l_2$ ,  $\mathcal{H}_{1,2}$  est un paraboloides hyperbolique droit. Le trisecteur  $\mathcal{H}_{1,2,3}$  est l'intersection de  $\mathcal{H}_{1,2}$  et  $\mathcal{H}_{1,3}$ , on peut donc appliquer le lemme 10 pour étudier séparément l'intersection d'un plan de  $\mathcal{H}_{1,3}$  avec le PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$ .

Nous démontrons la proposition 5 en plusieurs étapes correspondant à autant de lemmes. D'après le lemme 10 de l'étude réalisée pour le chapitre précédent, si dans une paramétrisation pour laquelle un PHD est d'axe  $(Oz)$  un plan le coupant est parallèle à l'axe  $(Oz)$  leur intersection est une parabole ou une droite, sinon c'est une hyperbole ou deux droites sécantes. Or le bissecteur de deux droites sécantes est formé de deux plans, nous allons montrer que ces plans sont liés et qu'ainsi l'étude du trisecteur de cette configuration se ramène en grande partie à celle du chapitre précédent.

**Lemme 20.** *Les droites  $l_1, l_2$  et  $l_3$  sont toutes parallèles à un même plan si et seulement si les plans  $\mathcal{H}_{1,3}^1$  et  $\mathcal{H}_{1,3}^2$  (formant le bissecteur  $\mathcal{H}_{1,3}$ ) sont parallèles à l'axe du PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$ .*

*Démonstration.* On se place dans la paramétrisation  $P_2$ . La direction commune de  $\mathcal{H}_{1,3}^1$  et  $\mathcal{H}_{1,3}^2$  est la droite  $(Oz)$  donc de direction  $(0, 0, 1)$ . L'axe du PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$  est donné par le produit vectoriel des deux droites dont il est le bissecteur.  $v_1 \wedge v_2 = (1, \phi, 0) \wedge (\alpha', \beta', \gamma') = (\phi\gamma', \gamma', \beta' - \alpha'\phi)$ .

Les plans formant  $\mathcal{H}_{1,3}$  sont parallèles à l'axe du PHD est équivalent  $v_1 \wedge v_2 = \lambda(0, 0, 1)$ ,  $\lambda \neq 0$ , ce qui est vrai si et seulement si  $\gamma' = 0$ . Or  $\gamma' = 0$  est équivalent à  $v_3 = (\alpha', \beta', 0)$  et les droites  $l_1, l_2$  et  $l_3$  sont parallèles au plan  $xy$ . □

**Lemme 21.** *Si les droites  $l_1, l_2$  et  $l_3$  sont toutes parallèles à un même plan alors le trisecteur est une parabole dans chacun des plans de  $\mathcal{H}_{1,3}$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme 20 si les trois droites sont parallèles alors les deux plans formant le bissecteur  $\mathcal{H}_{1,3}$  sont parallèles à l'axe du PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$ . Dans la paramétrisation  $P_1$ , l'axe du PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$  est  $(Oz)$  et  $\gamma$  est nul. De plus d'après le lemme 10, puisque chacun des plans est parallèle à l'axe du PHD, c'est-à-dire  $(Oz)$ , l'intersection entre le PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$  et l'un des plans de  $\mathcal{H}_{1,3}$  est une parabole ou une droite.

Considérons le premier plan  $\mathcal{H}_{1,3}^1$  du bissecteur des droites  $l_1$  et  $l_3$ , son coefficient en  $x$  vaut  $\sqrt{1+\theta^2}(\beta+\theta)(\theta\alpha-\beta)$ . Ce coefficient est nul si  $\beta = -\theta$  ou si  $\beta = \theta\alpha$ . Mais si  $\beta = -\theta$  alors  $v_3 = (\alpha, -\theta, 0)$  et comme  $v_3$  et  $v_2$  sont de même norme on a  $v_2 = v_3$  ou  $v_1 = -v_3$ . Si  $v_2 = v_3$  alors les droites  $l_2$  et  $l_3$  sont parallèles, ce qui est impossible par hypothèse. Sinon si  $v_1 = -v_3$  alors les droites  $l_1$  et  $l_3$  sont confondues, ce qui est impossible par hypothèse. Si  $\beta = \theta\alpha$  alors  $v_3 = (\alpha, \theta\alpha, 0) = \alpha(1, \theta, 0)$  et du fait de la condition sur la norme, de nouveau  $v_3 = v_1$  ce qui est impossible. En conclusion, le coefficient en  $x$  de  $\mathcal{H}_{1,3}^1$  n'est jamais nul.

Quant au coefficient en  $y$  de  $\mathcal{H}_{1,3}^1$ , il vaut  $-\sqrt{1+\theta^2}(1+\alpha)(\beta-\theta\alpha)$ . Pour qu'il soit nul, il faut que  $\alpha = -1$  ou  $\beta = \theta\alpha$ . On a déjà montré qu'il est impossible que  $\beta = \theta\alpha$ , il est également impossible que  $\alpha = -1$  car cela entraînerait du fait que les normes de  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  sont égales que  $v_3 = -v_1$  ou  $v_3 = -v_2$ , ce qu'on a montré impossible. Donc le coefficient en  $y$  de  $\mathcal{H}_{1,3}^1$  n'est jamais nul.

Le coefficient en  $x$  du plan  $\mathcal{H}_{1,3}^2$  vaut  $\sqrt{(1+\theta^2)(\theta\alpha-\beta)(\theta-\beta)}$  et son coefficient en  $y$  vaut  $-\sqrt{(1+\theta^2)(\theta\alpha-\beta)(\alpha+1)}$ . En suivant le même raisonnement que pour le plan  $\mathcal{H}_{1,3}^1$ , on montre que ces coefficients ne sont jamais nuls.

Puisque les coefficients en  $x$  et  $y$  du plan  $\mathcal{H}_{1,3}^1$  (respectivement  $\mathcal{H}_{1,3}^2$ ) ne sont jamais nuls, l'intersection entre le PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$  et le plan  $\mathcal{H}_{1,3}^1$  (respectivement  $\mathcal{H}_{1,3}^2$ ) est une parabole.  $\square$

Nous allons maintenant démontrer la propriété de monotonie pour deux droites gauches et deux droites sécantes. D'après la définition ??, ce sont les bissecteurs des droites  $l_1$  et  $l_2$ , donc les directions  $x$  et  $y$  de la paramétrisation  $P_1$ , sont les directions  $X$  et  $Y$ .

**Lemme 22.** *Soient deux droites gauches, deux droites sécantes, toutes parallèles à un même plan. Toutes les branches du trisecteur sont monotones par rapport à la direction  $X$  (ou par rapport à la direction  $Y$ ).*

*Démonstration.* Considérons chacun des plans de  $\mathcal{H}_{1,3}$  l'un après l'autre. On sait d'après le lemme 21 que dans un des plans de  $\mathcal{H}_{1,3}$  est une parabole. On démontre donc la monotonie de la même manière que dans le lemme 15 lorsque les trois droites sont parallèles à un même plan.  $\square$

### 5.3 Cellules 2D du diagramme de Voronoï

Dans cette section, nous allons décrire le diagramme de Voronoï de trois droites parallèles à un même plan dont une paire est gauche et une paire sécante. Le bissecteur de droites sécantes est l'union de deux plans orthogonaux. La cellule des droites sécantes est étudiée dans chacun des plans et comme on a vu précédemment le trisecteur est une parabole dans chacun des plans. On obtient la proposition 6 que nous démontrons dans les sous-sections ci-dessous.

#### 5.3.1 Cellule des droites $l_1$ et $l_2$

**Lemme 23.** *Soient les droites  $l_1$  et  $l_2$  gauches; les droites  $l_1$  et  $l_3$  sécantes. Si les toutes les droites sont parallèles à un même plan, la cellule des droites gauches  $l_1$  et  $l_2$  est l'union des deux régions du PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$  appartenant aux régions de l'espace plus proche de  $l_1$  que de  $l_3$  délimité par le bissecteur  $\mathcal{H}_{1,3}$ .*

*Démonstration.* C'est la définition même de la cellule 2D : la partie du bissecteur de deux objets plus proches de ceux-ci que de tout autre objet.  $\square$

#### 5.3.2 Cellule des droites $l_2$ et $l_3$

**Lemme 24.** *Soient les droites  $l_1$  et  $l_2$  gauches; les droites  $l_1$  et  $l_3$  sécantes. La cellule des droites gauches  $l_2$  et  $l_3$  est de même nature que celle de  $l_1$  et  $l_3$ .*

*Démonstration.* Géométriquement, on considère la cellule 2D de deux droites gauches, l'une des deux étant intersectée par la troisième. Si on intervertit  $l_1$  et  $l_3$ , on retrouve la cellule 2D des droites  $l_1$  et  $l_3$  qu'on a déterminé dans la sous-section précédente.  $\square$

#### 5.3.3 Cellule des droites $l_1$ et $l_3$

**Lemme 25.** *Soient les droites  $l_1$  et  $l_2$  gauches; les droites  $l_1$  et  $l_3$  sécantes. Si les toutes les droites sont parallèles à un même plan, la cellule 2D de ces droites sécantes est comprise dans bissecteur de ces droites qui est formé par deux plans. Dans chacun des plans, c'est la région située au-dessus de la parabole qui appartient à la cellule 2D.*



*Démonstration.* D'après le lemme 21, le trisecteur est une parabole dans chacun des plans de  $\mathcal{H}_{1,3}$ .

Remarquons que puisque le PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$  est d'axe  $(Oz)$ , toute droite verticale le coupe donc en un unique point. De plus, par construction la droite  $l_2$  est sous le PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$ . Considérons maintenant la droite verticale passant par le point  $p$  : elle rencontre la droite  $l_2$  avant le PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$ .

Ainsi, la région du plan  $\mathcal{H}_{1,3}^1$  (respectivement  $\mathcal{H}_{1,3}^2$ ) sous la parabole du trisecteur est plus proche de  $l_2$  que de  $l_1$ . On en conclut que la région du  $\mathcal{H}_{1,3}^1$  (respectivement  $\mathcal{H}_{1,3}^2$ ) au-dessus de la parabole du trisecteur dans ce plan appartient à la cellule 2D.  $\square$

## Chapitre 6

# Trois droites non parallèles à un même plan dont deux concourantes

Dans cette configuration, les deux paires de droites gauches ont un bissecteur qui est un paraboloidé hyperbolique droit. Comme on l'a vu au chapitre précédent, la paire de droites sécantes a un bissecteur constitué de deux plans liés orthogonaux et nous utiliserons donc les mêmes mises en équation. Mais contrairement au chapitre précédent, les trois droites ne sont pas parallèles à un même plan. Cela a pour conséquence que le trisecteur est une hyperbole dans chacun des plans du bissecteur des droites sécantes. C'est une situation plus compliquée que précédemment et nous mettrons en œuvre de nouvelles techniques pour déterminer les cellules 2D. Nous aurons alors réussi à démontrer les propositions suivantes :

**Proposition 7.** *Soient les droites  $l_1$  et  $l_2$  gauches ; les droites  $l_1$  et  $l_3$  sécantes. Si les trois droites ne sont pas parallèles à un même plan alors le trisecteur est composé d'une hyperbole dans chaque plan de  $\mathcal{H}_{1,3}$ . La projection du trisecteur dans le plan  $\mathcal{P}$  parallèle aux droites  $l_1$  et  $l_2$  est deux hyperboles équilatères. Chaque hyperbole admet des asymptotes parallèles au bissecteur de la projection des droites  $l_1$  et  $l_2$  dans le plan  $\mathcal{P}$ , toutes les asymptotes sont distinctes.*

**Proposition 8.** *Soient les droites  $l_1$  et  $l_2$  gauches ; les droites  $l_1$  et  $l_3$  sécantes. Si les toutes les droites ne sont pas parallèles à un même plan les cellules 2D du diagramme de Voronoï sont :*

- *La cellule des droites sécantes  $l_1$  et  $l_3$  est constituée d'une partie du bissecteur de ces droites qui est formé par deux plans. Dans un des plans, c'est la région entre les branches de l'hyperbole du trisecteur de ce plan qui lui appartient ; tandis que dans l'autre plan, c'est l'union des régions à l'extérieur de l'hyperbole du trisecteur dans ce plan qui lui appartient (voir figure 6.1).*
- *La cellule des droites gauches  $l_1$  et  $l_2$  est comprise dans le PHD qui forme leur bissecteur. Elle est formée de trois régions :*
  - *la région bordée par quatre arcs du trisecteur.*
  - *les deux régions bordées par des arcs de même direction asymptotique.*
- *La cellule des droites gauches  $l_2$  et  $l_3$  est de même nature que celle de  $l_1$  et  $l_3$ .*

### 6.1 Étude du trisecteur

Le bissecteur  $\mathcal{H}_{1,3}$  des droites  $l_1$  et  $l_3$  est constitué de deux plans. Celui de  $l_1$  et  $l_2$ ,  $\mathcal{H}_{1,2}$  est un paraboloidé hyperbolique droit. Le trisecteur  $\mathcal{H}_{1,2,3}$  est l'intersection de  $\mathcal{H}_{1,2}$  et  $\mathcal{H}_{1,3}$ , on peut donc appliquer le lemme 10 pour étudier séparément l'intersection d'un plan de  $\mathcal{H}_{1,3}$  avec le PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$ .

Nous démontrons la proposition 7 et en plusieurs étapes correspondant à autant de lemmes. D'après le lemme 20, puisque les trois droites ne sont pas parallèles à un même plan, les plans de  $\mathcal{H}_{1,3}$  ne sont pas parallèles à l'axe du PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$ . Donc d'après le lemme 10, le trisecteur est une hyperbole ou deux droites sécantes dans chacun des plans. Nous allons montrer que le trisecteur n'est jamais deux droites sécantes dans un des plans.

**Lemme 26.** *Si les droites  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  ne sont pas toutes parallèles à un même plan alors le trisecteur est une hyperbole dans chacun des plans de  $\mathcal{H}_{1,3}$ .*

*Démonstration.* On se place dans la paramétrisation  $P_1$ . D'après le lemme 20, si les trois droites ne sont pas toutes parallèles à un même plan alors les deux plans formant le bissecteur  $\mathcal{H}_{1,3}$  ne sont pas parallèles à l'axe du PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$  donc  $(Oz)$  et  $\gamma$  est non nul. De plus d'après le lemme 10, puisque chacun des plans n'est pas parallèle à l'axe  $(Oz)$ , l'intersection entre le PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$  et l'un des plans de  $\mathcal{H}_{1,3}$  est une hyperbole ou deux droites sécantes.

On va maintenant montrer que le cas dégénéré où le trisecteur est deux droites sécantes dans un des plans de  $\mathcal{H}_{1,3}$  est impossible. Que l'on utilise la paramétrisation  $P_1$  ou  $P_2$  ne change pas la nature géométrique de la conique considérée. On va donc se placer dans la paramétrisation  $P_2$  pour la suite de la preuve car l'expression des plans et par suite l'expression des coniques dans ces plans y sont plus simples.

Comme dans la preuve du lemme 14 du cas précédent, on considère le déterminant de la matrice  $R$  associée à l'intersection du plan  $\mathcal{H}_{1,3}^1$  et du PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$ . Dans la paramétrisation  $P_2$ , il vaut :

$$\det(R) = -\gamma'^2(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)^2(1 + \phi)^2(e - d\phi)(e + d\phi) \quad (6.1)$$

Comme  $\gamma'$  est non nul, le facteur  $-\gamma'^2$  est strictement négatif. De plus, les facteurs  $(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)^2$  et  $(1 + \phi)^2$  correspondent respectivement à la norme au carré de  $v_2$  et  $v_1$ , ils sont donc strictement positifs. Si le facteur  $e - d\phi$  (respectivement  $e + d\phi$ ) est nul alors le point  $p_3$  vaudrait  $d(1, \phi, 0)$  (respectivement  $d(1, -\phi, 0)$ ) ce qui entraînerait que les droites  $l_1$  et  $l_3$  (respectivement  $l_1$  et  $l_2$ ) seraient sécantes, ce qui est contraire aux hypothèses.

Puisque les facteurs du déterminant de  $R$  ne sont jamais nuls, l'intersection entre le plan  $\mathcal{H}_{1,3}^1$  et le PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$  est non dégénérée, c'est donc toujours une hyperbole. En procédant de la même manière que pour le plan  $\mathcal{H}_{1,3}^1$ , on montre que l'intersection entre le plan  $\mathcal{H}_{1,3}^1$  et le PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$  est aussi une hyperbole. □

**Lemme 27.** *Si les droites  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  ne sont pas toutes parallèles alors la projection du trisecteur dans le plan  $\mathcal{P}$  parallèle aux droites  $l_1$  et  $l_2$  est deux hyperboles équilatères. Chaque hyperbole admet des asymptotes parallèles au bissecteur de la projection des droites  $l_1$  et  $l_2$  dans le plan  $\mathcal{P}$  (directions  $x$  et  $y$  dans la paramétrisation  $P_1$ ). Chaque hyperbole admet des asymptotes distinctes de l'autre hyperbole.*

*Démonstration.* On se place dans la paramétrisation  $P_1$ . Puisque les droites  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  ne sont pas toutes parallèles à un même plan, d'après le lemme 20, les plans formant le bissecteur  $\mathcal{H}_{1,3}$  ne sont pas parallèles à l'axe  $(Oz)$  qui est l'axe du PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$ . Donc la projection dans le plan  $xy$  du trisecteur qui est une hyperbole dans chacun des plans de  $\mathcal{H}_{1,3}$  n'est pas dégénérée. En conclusion, la projection dans le plan  $xy$  du trisecteur est deux hyperboles car une projection non dégénérée conserve la nature géométrique des objets.

À l'aide des équations de  $\mathcal{H}_{1,2}$  et de  $\mathcal{H}_{2,3}$ , on obtient une équation de la projection du trisecteur dans le plan  $xy$ .

Rappelons une propriété classique d'une courbe 2D définie par une équation implicite : une courbe 2D admet une asymptote verticale  $x_k = 0$  lorsque le polynôme en  $x$  du coefficient dominant en  $y$  s'annule en  $x_k$ . De même, une courbe 2D admet une asymptote horizontale  $y_k = 0$  lorsque le polynôme en  $y$  du coefficient dominant en  $x$  s'annule en  $y_k$ .

Or le discriminant du polynôme en  $x$  du coefficient dominant en  $y$  vaut  $4\gamma^2\theta^4$ . Il est strictement positif car puisque les trois droites ne sont pas parallèles  $\gamma \neq 0$  et on sait que  $\theta > 0$ . Donc le trisecteur admet deux asymptotes horizontales distinctes. Le discriminant du polynôme en  $y$  du coefficient dominant en  $x$  vaut  $4\gamma^2\theta^2$ . Il est strictement positif pour les mêmes raisons qu'auparavant, donc le trisecteur admet deux asymptotes horizontales distinctes.

De plus, une hyperbole ne peut avoir deux asymptotes de même direction. Donc chacune des hyperboles du trisecteur admet une asymptote horizontale et une asymptote verticale, distinctes de celles de l'autre hyperbole. Enfin puisque chaque hyperbole admet une asymptote parallèle à l'axe  $(Ox)$  et une parallèle à l'axe  $(Oy)$  et que ces directions sont orthogonales, les hyperboles sont équilatères. □

**Lemme 28.** *L'ensemble des triplets de droites  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  non toutes parallèles à un même plan tel que deux droites soient sécantes et la troisième droite leur soit gauche se décompose en deux composantes connexes. Dans la paramétrisation  $P_1$ , on donne un représentant dans chaque composante connexe :*

- représentant 1 :  $\theta = 1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 1$
- représentant 2 :  $\theta = 1$ ,  $\lambda = -1$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 1$

*Démonstration.* On se place dans la paramétrisation  $P_1$ . Sous ces hypothèses, d'après le lemme 27 on a que chaque hyperbole admet une asymptote horizontale et une asymptote verticale différentes des asymptotes de la seconde hyperbole. On ne peut changer de topologie que si les asymptotes se croisent ce qui n'est pas possible puisque les asymptotes d'une même direction sont distinctes.

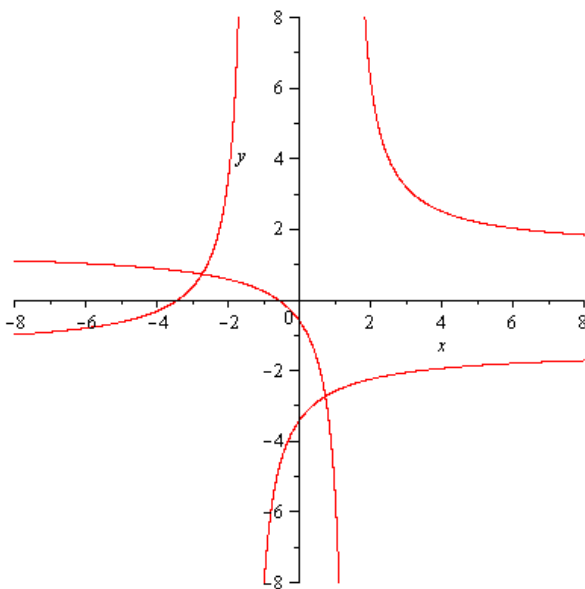
Considérons un triplet de droite respectant les hypothèses dans la paramétrisation  $P_1$ . Puisque les droites  $l_2$  et  $l_3$  sont gauches, la droite  $l_2$  coupe le plan  $z = -1$  en un point. On peut donc définir la droite  $l_3$  par son point d'intersection avec la droite  $l_1$  et son point d'intersection avec le plan  $z = 1$ .

On peut modifier continûment la droite  $l_3$  en déplaçant le point d'intersection de celle-ci avec le plan  $z = -1$  jusqu'à atteindre soit le point  $m = (1, \theta, -1)$  ou le point  $n = (-1, -\theta, -1)$  en respectant les hypothèses, c'est-à-dire sans croiser  $l_2$  puisque  $l_2$  est une partition du plan  $z = -1$ . Si on a atteint le point  $m$  (respectivement  $n$ ), on peut modifier continûment le point d'intersection entre les droites  $l_1$  et  $l_3$  jusqu'à atteindre le point  $(1, \theta, 1)$  (respectivement  $(-1, -\theta, 1)$ ) dont le projeté est  $m$  (respectivement  $n$ ) en respectant les hypothèses. Finalement, on peut modifier continûment le paramètre  $\theta$  jusqu'à  $\theta = 1$  en respectant les hypothèses donc en restant dans la même composante connexe.

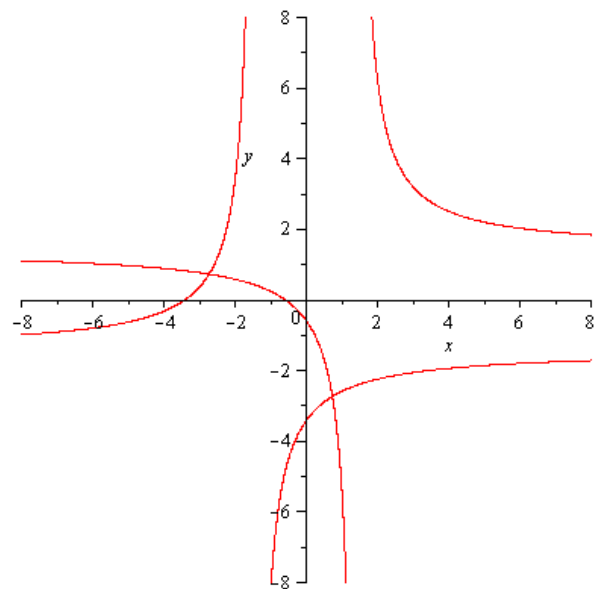
Puisque pour tout triplet de droite respectant les hypothèses, on a montré qu'on peut atteindre un des deux représentants exhibés de sa composante connexe continûment et qu'on ne peut passer continûment d'un représentant à l'autre sans croiser la droite  $l_2$ , on a donc deux composantes connexes.  $\square$

**Lemme 29.** *Si les trois droites  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  ne sont pas toutes parallèles à un même plan, la projection dans un plan auquel  $l_1$  et  $l_2$  sont parallèles est deux hyperboles tel qu'une branche d'une des hyperboles coupe les deux branches de l'autre hyperbole.*

*Démonstration.* D'après le lemme 28, il existe deux composantes connexes de triplets de droites respectant ces hypothèses. D'après les figure 6.1(c) et 6.1(c), on voit que pour le représentant de chaque composante connexe, une branche d'une hyperbole coupe les deux branches de l'autre, donc c'est vrai pour tout triplet de droites respectant ces hypothèses.  $\square$



(c) Projection du trisecteur dans un plan parallèles aux droites gauches pour le représentant 1 ( $\theta = 1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 1$ )



(d) Projection du trisecteur dans un plan parallèles aux droites gauches pour le représentant 2 ( $\theta = 1$ ,  $\lambda = -1$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 1$ )

Nous allons maintenant démontrer la propriété de monotonie pour deux droites gauches et deux droites sécantes. D'après la définition 1, ce sont les bissecteurs des droites gauches  $l_1$  et  $l_2$ , donc les directions  $x$  et  $y$  de la paramétrisation  $P_1$ , sont les directions  $X$  et  $Y$ .

**Lemme 30.** *Soient deux droites gauches, deux droites sécantes, non toutes parallèles à un même plan. Toutes les branches du trisecteur sont monotones par rapport à la direction  $X$  et par rapport à la direction  $Y$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme 27, la projection du trisecteur est deux hyperboles équilatères et chaque hyperbole admet des asymptotes parallèles aux axes  $x$  et  $y$  du plan  $xy$ . Donc chaque hyperbole est monotone en  $x$  et en  $y$ . Puisque le trisecteur se trouve sur le PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$  et que la projection entre ce PHD et le plan  $xy$  est bijective bicontinue, le trisecteur est monotone par rapport à la direction  $x$  et la direction  $y$ .  $\square$

## 6.2 Cellules 2D du diagramme de Voronoï

Dans cette section, nous allons décrire le diagramme de Voronoï de trois droites dont une paire est gauche et une paire sécante. Le bissecteur de droites sécantes est l'union de deux plans orthogonaux. La cellule des droites sécantes est étudié dans chacun des plans et comme on a vu précédemment le trisecteur est une hyperbole dans chacun des plans. On obtient la proposition 8 que nous démontrons dans les sous-sections ci-dessous.

### 6.2.1 Cellule des droites $l_1$ et $l_2$

**Lemme 31.** *Soient les droites  $l_1$  et  $l_2$  gauches ; les droites  $l_1$  et  $l_3$  sécantes. Si les toutes les droites ne sont pas parallèles à un même plan, la cellule 2D  $\mathcal{V}_{1,2}$  des droites  $l_1$  et  $l_2$  est constituée d'une partie du PHD qui forme leur bissecteur. Elle est formée de trois régions :*

- la région bordée par quatre arc du trisecteur.
- les deux régions bordées par des arcs de même direction asymptotique.

*Démonstration.* D'après le lemme 28, on peut ramener l'étude de la cellule 2D à l'étude de la cellule 2D pour le représentant de chacun des deux composantes connexes. On considère l'origine qui est sur le bissecteur des droites  $l_1$  et  $l_2$  et on se place dans la paramétrisation  $P_1$ .

L'origine est plus proche de ces droites que de la droite  $l_3$  donc la partie du PHD qui contient l'origine appartient à  $\mathcal{V}_{1,2}$ . Pour les deux représentants, c'est la région bordée par les deux asymptotes verticales et les deux asymptotes horizontales.

De plus, à chaque fois qu'on traverse la frontière déterminée par le trisecteur sur le PHD  $\mathcal{H}_{1,2}$ , on sait que si on était sur une région appartenant à la cellule 2D on passe à une région ne lui appartenant pas et vice-versa. En appliquant ce principe pour chaque représentant, on trouve que la région bordée par les deux asymptotes verticales et la région bordée par les deux asymptotes horizontales complètent la cellule 2D  $\mathcal{V}_{1,2}$ .  $\square$

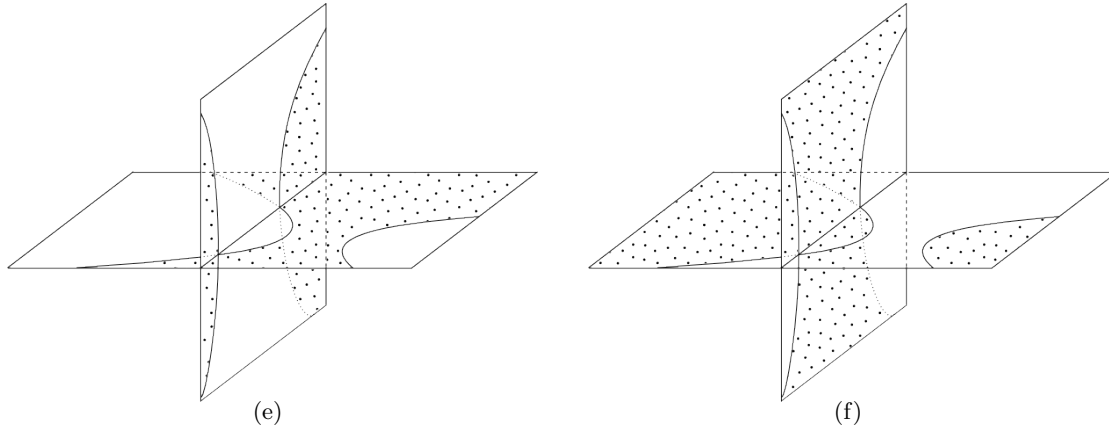
### 6.2.2 Cellule des droites $l_2$ et $l_3$

**Lemme 32.** *Soient les droites  $l_1$  et  $l_2$  gauches ; les droites  $l_1$  et  $l_3$  sécantes. La cellule des droites gauches  $l_2$  et  $l_3$  est de même nature que celle de  $l_1$  et  $l_3$ .*

*Démonstration.* Géométriquement, on considère la cellule 2D de deux droites gauches, l'une des deux étant intersectée par la troisième. Si on intervertit  $l_1$  et  $l_3$ , on retrouve la cellule 2D des droites  $l_1$  et  $l_3$  qu'on a déterminé dans la sous-section précédente.  $\square$

### 6.2.3 Cellule des droites $l_1$ et $l_3$

**Lemme 33.** *Soient les droites  $l_1$  et  $l_2$  gauches ; les droites  $l_1$  et  $l_3$  sécantes. Si les toutes les droites ne sont pas parallèles à un même plan, la cellule 2D de ces droites sécantes est comprise dans bissecteur de ces droites qui est formé par deux plans. Dans un plan, c'est la région entre les branches de l'hyperbole du*

FIG. 6.1 – Cellule 2D des droites sécantes  $l_1$  et  $l_3$ 

trisecteur de ce plan lui appartient; tandis que dans l'autre plan, c'est l'union des régions à l'extérieur de l'hyperbole du trisecteur dans ce plan qui lui appartient (voir figure 6.1).

*Démonstration.* On se place dans la paramétrisation  $P_2$  où l'expression des plans de  $\mathcal{H}_{1,3}$  est plus simple ( $x = 0$  et  $y = 0$ ). Ensuite, on calcule le centre de l'hyperbole (notée  $c_{1,2,3}^1$ ) contenue dans le plan  $y = 0$  puis la différence de la distance entre d'une part le centre de l'hyperbole et la droite  $l_1$  et d'autre part le centre de l'hyperbole et la droite  $l_2$ , on obtient alors :

$$d^2(c_{1,2,3}^1, l_1) - d^2(c_{1,2,3}^1, l_2) = d^2\phi^2 - e^2 \quad (6.2)$$

La différence de distance 6.2 n'est jamais nulle car  $d^2\phi^2 = e^2$  entraîne que  $p_2 = d(1, \phi, 0)$  ou  $p_2 = d(1, \phi, 0)$  or par hypothèse la droite  $l_2$  est gauche aux deux autres c'est donc impossible.

Si la différence 6.2 est négative alors  $c_{1,2,3}^1$  est plus proche de  $l_1$  et par suite  $\mathcal{V}_{1,3}$  contient la région située entre les branches de l'hyperbole. Au contraire si cette différence est positive, alors  $c_{1,2,3}^1$  est plus proche de  $l_2$  donc les régions situées à l'extérieur des branches de l'hyperbole appartiennent à  $\mathcal{V}_{1,3}$ .

Dans l'autre plan  $x = 0$ , la région appartenant à la cellule 2D est en quelque sorte l'opposée de la région appartenant à la cellule 2D dans le plan  $y = 0$ . En effet si dans le plan  $y = 0$ , c'est la région située entre les branches de l'hyperbole du trisecteur dans ce plan qui appartient à  $\mathcal{V}_{1,3}$  alors dans le plan  $x = 0$  c'est l'union des régions situées à l'extérieur des branches de l'hyperbole du trisecteur dans ce plan. Et vice-versa si dans le plan  $y = 0$  c'est l'union des régions situées à l'extérieur des branches de l'hyperbole du trisecteur dans ce plan qui appartient à  $\mathcal{V}_{1,3}$ .

Cela s'explique par le fait qu'une branche d'une hyperbole coupe les deux branches de l'autres. En raisonnant sur la droite  $(Oz)$  qui appartient aux deux plans, on se rend compte de ce fait. Pour plus de clarté, la figure 6.1 illustre ces deux situations.  $\square$

# Conclusion

En complétant l'étude du papier [ELLS07], nous avons apporté une caractérisation complète et nouvelle du diagramme de Voronoï de trois droites dans l'espace euclidien. En effet, pour chaque configuration possible de trois droites, nous avons donné la géométrie et la topologie du trisecteur et des 2-cellules.

Nous avons également montré que peu importe la configuration des trois droites, la propriété de monotonie reste vraie. Cela permet d'ordonner les points d'intersection d'une quatrième droite avec le trisecteur et donc de faciliter l'étude du diagramme de Voronoï de quatre droites et plus. Il reste toutefois à étiqueter les branches du trisecteur pour pouvoir écrire un algorithme exact à base de tests linéaires permettant de situer un point dans le diagramme de Voronoï.

Nos résultats sont un pas en avant vers le défi de l'étude du diagramme de Voronoï de six droites dans l'espace. En effet, ce problème est d'un grand intérêt puisque pour le cas général de  $n$  droites, les arcs du diagramme de Voronoï sont définis par cinq droites. Ils sont également un pas en avant vers les deux grands défis majeurs que sont le calcul de complexité du diagramme de Voronoï de  $n$  droites et la conception d'algorithmes efficaces pour calculer le diagramme de Voronoï d'objets linéaires (droites, segments, triangles ou polyèdres) dans l'espace.

# Bibliographie

- [ABSC00] Okabe. A, B. BOOTS, K. SUGIHARA et S. N. CHIU. *Spatial Tessellations - Concepts and Application of Voronoi Diagrams*. John Wiley, deuxième édition, 2000.
- [AK99] F. AURENHAMMER et R. KLEIN. Voronoi diagrams. Dans J.R. SACK et J. URRUTIA, éditeurs, *Handbook of computational geometry*, Chapitre 5, pages 201–290. Elsevier Publishing House, 1999.
- [Aur91] F. AURENHAMMER. « Voronoi diagrams - a survey of a fundamental geometric data structure ». *ACM Computing Surveys*, 23(3) : 345–405, 1991.
- [BDP<sup>+</sup>92] J.-D. BOISSONAT, O. DEVILLERS, S. PION, M TEILLAUD et M. YVINEC. « Applications of random sampling to on-line algorithms in computational geometry ». *Discrete and Computational Geometry*, 8 : 51–71, 1992.
- [BDP<sup>+</sup>02] J.-D. BOISSONAT, O. DEVILLERS, S. PION, M. TEILLAUD et M. YVINEC. « Triangulations in CGAL ». *Computational Geometry*, 22 : 5–19, 2002.
- [BHK<sup>+</sup>05] E. BERBERICH, M. HEMMER, L. KETTNER, E. SCHÖMER et N. WOLPERT. « An exact, complete and efficient implementation for computing planar maps of quadric intersections curves ». pages 99–115, 2005.
- [CS89] K. L. CLARKSON et P. W. SHOR. « Applications of random sampling in computational geometry, II ». *Discrete and Computational Geometry*, 4 : 387–421, 1989.
- [CSY97] T. M. CHAN, J. SNOEYINK et C. K. YAP. « Primal dividing and dual pruning : Output-sensitive construction of four dimensional polytopes and three-dimensional voronoi diagrams ». *Discrete and Computational Geometry*, 18 : 433–454, 1997.
- [Cul00] T. CULVER. « *Computing the Medial Axis of a Polyhedron Reliably and Efficiently* ». Thèse, University of North Carolina, Chapel Hill, 2000.
- [Del00] C. DELODE. *Géométrie affine et euclidienne*. Dunod Université, France, 2000.
- [Dev06] O. DEVILLERS. *Un joli algorithme géométrique et ses vilains problèmes numériques*. <http://interstices.info/algorithme-geometrique>, 2006.
- [DLLP08] L DUPONT, D LAZARD, S LAZARD et S PETITJEAN. « Near-optimal parametrization of the intersection of quadrics : II. A classification of pencils ». *Journal of Symbolic Computation*, 43(3) : 192–215, 2008.
- [DZ02] T. K. DEY et W. ZHAO. « Approximate medial axis as a voronoi subcomplex ». pages 356–366, New York, NY, USA, 2002.
- [ELLS07] H EVERETT, D LAZARD, S LAZARD et S SAFEY EL DIN. « The Voronoi diagram of three lines in  $\mathbb{R}^3$  ». S. Korea, 2007.
- [ER02] M. ETZION et A. RAPPOPORT. « Computing voronoi skeletons of a 3-d polyhedron by space subdivision ». *Computational Geometry : Theory and Applications*, 21(3) : 87–120, 2002.
- [Fer08] R. FERRÉOL. *Encyclopédie des formes mathématiques remarquables*. <http://http://www.mathcurve.com>, 2008.
- [For97] S. FORTUNE. Voronoi diagrams and delaunay triangulations. Dans *Handbook of discrete and computational geometry*, pages 377–388. CRC Press, Inc., USA, 1997.



- [HCK99] « Fast computation of generalized Voronoi diagrams using graphics hardware ». volume 33(Annual Conference Series), pages 277–286, 1999.
- [Kar04] M. I. KARAVELAS. « A robust and efficient implementation for the segment voronoi diagram ». *International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering*, pages 51–62, 2004.
- [KKM99] J. KEYSER, S. KRISHNAN et D. MANOCHA. « Efficient and accurate B-Rep generation of low degree sculptured solids using exact arithmetic : I - Representations, II - Computation ». 16(9) : 841–859, 861–882, 1999.
- [KS03] V. KOLTUN et M. SHARIR. « Three dimensional euclidean voronoi diagrams of lines with a fixed number of orientations ». *SIAM Journal on Computing*, 32(3) : 616–642, 2003.
- [Laz07] S. LAZARD. *Robustesse des calculs géométriques*. [http://www.loria.fr/~everett/geo\\_algo/Robustesse1.pdf](http://www.loria.fr/~everett/geo_algo/Robustesse1.pdf), 2007.
- [LFA88] J. LELONG-FERRAND et J-M. ARNAUDIÈS. *Géométrie et cinématique*. Dunod Université, France, deuxième édition, 1988.
- [Map07] *The Maple System 11.0*. Waterloo Maple Software, <http://www.maplesoft.com>, 2007.
- [Mil93] V. J. MILENKOVIC. « Robust construction of the voronoi diagram of a polyhedron ». pages 473–478, 1993.
- [MTT05] B. MOURRAIN, J.-P. TÉCOURT et M. TEILLAUD. « On the computation of an arrangement of quadrics in 3D ». *Computational Geometry : Theory and Applications*, 30(2) : 145–164, 2005. Numéro spécial, 19th European Workshop on Computational Geometry.
- [Pal02] K. PALÁGYI. « A 3-subiteration 3D thinning algorithm for extracting medial surfaces ». *Pattern Recognition Letters*, 23 : 663–675, 2002.
- [PT06] S. PION et M. TEILLAUD. 3D triangulations. Dans CGAL EDITORIAL, éditeur, *CGAL-3.2 User and Reference Manual*. 2006.
- [PW01] H. POTTMAN et J. WALLNER. *Computational Line Geometry*. Springer, 2001.
- [Sei81] S. SEIDEL. « A convex hull algorithm optimal for point sets in even dimensions. ». Mémoire de master, Univ. British Columbia, Vancouver, BC, 1981.
- [Sha94] M. SHARIR. « Almost tight upper bounds for lower envelopes in higher dimensions ». *Discrete and Computational Geometry*, 12 : 327–345, 1994.
- [SMN<sup>+</sup>06] E. SORANTIN, D. MOHADJER, L.G. NYÚL, K. PALÁGYI, F. LINDBICHLER et B. GEIGER. « New advances for imaging of laryngotracheal stenosis by post processing of spiral-CT data », pages 297–308. Springer, 2006.
- [SNTM92] V. SRINIVASAN, L. R. NACKMAN, J.-M. TANG et S. N. MESHKAT. « Automatic mesh generation using the symmetric axis transform of polygonal domains ». *Proc. IEEE*, 80(9) : 1485–1501, 1992.
- [SS97] O. SCHWARZKOPF et M. SHARIR. « Vertical decomposition of a single cell in a three-dimensional arrangement of surfaces and its applications ». *Discrete and Computational Geometry*, 18 : 269–288, 1997.
- [SW06] E. SCHÖMER et N. WOLPERT. « An exact and efficient approach for computing a cell in an arrangement of quadrics ». *Computational Geometry : Theory and Applications*, 33(1-2) : 65–97, 2006. Numéro spécial sur Robust Geometric Algorithms and their Implementations.
- [TT97] M. TEICHMANN et S. TELLER. « Polygonal approximation of voronoi diagrams of a set of triangles in three dimensions ». Rapport Technique 766, Laboratory of Computer Science, MIT, 1997.

## Annexe A

# Trois droites deux à deux coplanaires

Dans cette appendice, nous allons étudier succinctement les cas les plus simples du diagramme de Voronoï de trois droites, ceux pour lesquels au moins deux paires de droites sont coplanaires deux à deux.

Les situations où les trois paires de droites sont coplanaires sont beaucoup plus simples car le diagramme de Voronoï de celles-ci reste linéaire. En effet, le bissecteur de droites coplanaires est un ou deux plans et le trissecteur de trois droites deux à deux coplanaires.

### A.1 Deux paires de droites coplanaires dans deux plans distincts

#### A.1.1 Une paire s'intersecte, l'autre est parallèle

On peut voir une illustration de cette situation sur la figure 2.1(d). Le bissecteur des deux droites sécantes est deux plans, celui des deux droites parallèles un plan. Les trois droites sont parallèles à un même plan. Le trissecteur est formé de deux droites dans le plan qui est le bissecteur des droites parallèles.

#### A.1.2 Chaque paire s'intersecte

On peut voir une illustration de cette situation sur la figure 2.1(e). Le bissecteur des deux droites sécantes est deux plans. Le trissecteur est formé de quatre droites, deux droites dans chaque plan d'un des bissecteurs de droites sécantes.

**Lemme 34.** *Soient trois paires de droites coplanaires formant des plans distincts. Toutes les branches du trissecteur sont monotones par rapport à la direction  $X$  (ou par rapport à la direction  $Y$ ).*

*Démonstration.* Peu importe la paire de droite choisie, la projection du trissecteur dans ce plan est bijective et bicontinue dans chaque branche du trissecteur est monotone.  $\square$

### A.2 Trois paires de droites coplanaires formant des plans distincts

#### A.2.1 Chaque paire de droite est parallèle

On peut voir une illustration de cette situation sur la figure 2.1(f). Le bissecteur des deux droites parallèles est un plan. Donc le trissecteur est la droite d'intersection de deux bissecteurs.

#### A.2.2 Les droites sont sécantes en un même point

On peut voir une illustration de cette situation sur la figure 2.1(g). Le bissecteur des deux droites sécantes est constitué de deux plans. Le trissecteur est constitué de quatre droites, deux droites dans chaque plan d'un des bissecteurs de droites sécantes.

### A.2.3 Monotonie

**Lemme 35.** *Soient trois paires de droites coplanaires formant des plans distincts. Toutes les branches du trisecteur sont monotones par rapport à la direction  $X$  (ou par rapport à la direction  $Y$ ).*

*Démonstration.* Peu importe la paire de droite choisie, la projection du trisecteur dans ce plan est bijective et bicontinue dans chaque branche du trisecteur est monotone.  $\square$

## A.3 Toutes les droites sont dans un même plan

### A.3.1 Les droites sont deux à deux parallèles

On peut voir une illustration de cette situation sur la figure 2.1(h). Le bissecteur des deux droites parallèles est un plan orthogonal aux deux droites. Le trisecteur est vide car les bissecteurs sont des plans parallèles.

### A.3.2 Deux droites sont parallèles, la troisième les intersecte

On peut voir une illustration de cette situation sur la figure 2.1(i). Le trisecteur est deux droites car le bissecteur des droites parallèles est coupé par chacun des plans du bissecteur des droites sécantes en une droite.

### A.3.3 Les trois droites se rencontrent en un même point

On peut voir une illustration de cette situation sur la figure 2.1(j). Le trisecteur est une droite qui est la droite orthogonale au plan et qui passe par le point d'intersection des trois droites.

### A.3.4 Les trois droites se coupent en trois points

On peut voir une illustration de cette situation sur la figure 2.1(k). Le trisecteur est quatre droites qui sont les droites orthogonales au plan et qui passent par un des points d'intersection entre deux bissecteurs.

### A.3.5 Monotonie

**Lemme 36.** *Soient trois droites dans un même plan. Toutes les branches du trisecteur sont monotones par rapport à la direction  $X$  (ou par rapport à la direction  $Y$ ).*

*Démonstration.* Chaque branche du trisecteur est une droite orthogonale au plan. Puisque la direction  $X$  ou  $Y$  est la direction normale au plan, chaque branche du trisecteur est monotone.  $\square$